DOI: 10.25728/mlsd.2022.0186

ЦЕНЫ И ДЕЦЕНТРАЛИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ

Горелов М.А., Ерешко Ф.И.

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,

Россия, г. Москва, ул.Вавилова, д. 44, кор. 2

griefer@ccas.ru, fereshko@yandex.ru

Аннотация: Рассматриваются модели двухуровневой иерархической системы при разной степени информированности центра и подсистем. Исследуются процедуры управления путём распределения ресурсов, выпусков продукции и назначения цен. Сформулирована принципиально новая для иерархических игр задача проектирования механизмов согласования решений подсистем по добровольному выполнению общих ограничений.

Ключевые слова: теория иерархических игр, игры с неопределенными факторами, максимальный гарантированный результат, механизм согласования в запросах ресурсов.

Введение

Проблеме функционирования иерархических систем посвящена значительная литература, что является следствием базового значения такой структуры в организации деятельности активных подсистем [1 - 5].

В работе авторов [6] было начато системное последовательное исследование иерархических игр в линейном случае.

Выбор линейных моделей определяется двумя обстоятельствами.

Особое внимание линейным задачам уделяется вследствие балансового характера законов сохранения в реальных экономических процессах производства, распределения и потребления благ.

К тому же для классической записи оптимизационных задач весьма продуктивной оказалась идея линейного штрафа и использования соответствующих функций Лагранжа, имеющих своими истоками модели классической механики.

В формальной записи оптимизационные задачи для линейных моделей производственных процессов, имеют следующий вид:

$$(c, x) \to \max, \tag{1}$$

$$Ax \le b,\ x \in E_n^+, \tag{2}$$

или в развёрнутой форме

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_j,\ j = 1,...,m, \tag{4}$$

$$x_i \ge 0, i = 1,...,n. \tag{5}$$

Здесь компонента x_i вектора x есть уровень интенсивности технологии номер ($i = 1,..., n$) из заданного списка, коэффициенты матрицы ограничений $A = \|a_{ij}\|$ определяют нормативы потребления ресурса номер $j = 1,..., m$ при единичной интенсивности технологических процессов номер $i = 1,..., n$, c_i – доходности технологических процессов номера $i = 1,..., n$, b_j – компоненты вектора b, суть потребляемые ресурсы номера $j = 1,..., m$.

Как правило, принимается, что система ограничений совместна, т.е. существует такой вектор $x_0 \ge 0$, что $Ax_0 < b$.

С формальной точки зрения для анализа описанной модели весьма плодотворной и удобной оказалась идея введения функции Лагранжа

$$L(x, \lambda) = (c, x) + (\lambda, b - Ax) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (b_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i) \tag{6}$$

где $\lambda_j \ge 0$, $j = 1,\ldots,m$. Компоненты вектора λ носят название множителей Лагранжа и имеют несколько интерпретаций.

С точки зрения экономической интерпретации, функция Лагранжа представляет собой запись общего капитала предприятия, деятельность которого описывается приведенными соотношениями в согласии с теорией производственных процессов: слагаемое (c,x) отражает доход от выпускаемой продукции, а член $(\lambda, b-Ax)$ равняется оценке недоиспользуемых ресурсов по некоторым ресурсным ценам λ.

С формальной точки зрения теории управления слагаемое $(\lambda, b-Ax)$ отражает идею штрафа за нарушение ограничений $Ax \le b$, так как при значениях $x \ge 0$, при которых $Ax > b$, слагаемое $(\lambda, b-Ax)$ имеет отрицательное значение и тем самым уменьшает общее значение оптимизируемой функции (c,x).

Далее рассматриваются вопросы управляемости централизованными и децентрализованными системами с разными уровнями информированности относительно параметров моделей экономических систем.

1 Задача дележа дефицитных ресурсов

Пусть имеется n производственных систем. Будем обозначать их числами 1, 2,…,n.

В каждой системе может производиться m видов продукции. При этом затрачиваются ресурсы k видов. Каждая система имеет собственные запасы ресурсов: система i имеет ресурс вида l в количестве b_l^i (i = 1, 2,…, n, l = 1, 2,…, k).

Кроме того, имеются централизованные запасы ресурсов: ресурс вида l имеется в количестве r_l.

Будем считать, что технологические процессы в системах описываются производственными функциями леонтьевского типа: если система i выделяет на производство продукции типа j ресурсы в количестве y_{lj}^i (l = 1, 2,…, k), то будет произведен объем продукции $x_j^i = \min\limits_{1 \le l \le k} \dfrac{y_{lj}^i}{p_{lj}^i}$, где p_{lj}^i – некоторые положительные параметры (i = 1, 2,…, n, j = 1, 2,…, m).

При экономически осмысленных значениях параметров, как правило, это нормативы, таким производственным функциям соответствуют линейные функции затрат. В самом деле, если в системе i нужно произвести единицу продукции вида j, то потребуются ресурсы в количестве p_{lj}^i (l = 1, 2,…, k). Следовательно, под программу выпусков $x^i = \left(x_1^i, x_2^i, ..., x_m^i\right)^T$ потребуются затраты ресурса вида l в количестве $y_l^i = p_{l1}^i x_1^i + p_{l2}^i x_2^i + ... + p_{lm}^i x_m^i$ (здесь и далее верхний индекс T обозначает транспонирование).

Введя в рассмотрение матрицу

$$P^i = \begin{pmatrix} p_{11}^i & p_{12}^i & \cdots & p_{1m}^i \\ p_{21}^i & p_{22}^i & \cdots & p_{2m}^i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1}^i & p_{k2}^i & \cdots & p_{km}^i \end{pmatrix}, \tag{7}$$

связь между выпусками $x^i = \left(x_1^i, x_2^i, ..., x_m^i\right)^T$ и затратами $y^i = \left(y_1^i, y_2^i, ..., y_k^i\right)^T$ можно записать в компактной форме $y^i = P^i x^i$.

Введем обозначения для суммарных выпусков и затрат: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^T = x^1 + x^2 + \ldots + x^n$, $y = (y_1, y_2, \ldots, x_k)^T = y^1 + y^2 + \ldots + y^n$.

Будем считать, что целью управления является максимизация выпусков в заданных пропорциях, т.е. цель управления задается функцией $\min\limits_{1 \le j \le m} \dfrac{x_j}{\alpha_j}$, где α_j – заданные положительные параметры.

2 Централизованное управление в условиях неопределённости

Рассмотрим случай, когда оперирующей стороне не известны точно коэффициенты затрат p_{lj}^i. Будем считать, что «истинные» матрицы затрат P^i принадлежат параметрическим семействам $P^i(\omega^i)$, где параметр ω^i принадлежит множеству Ω^i. Оперирующей стороне известно множество $\Omega = \Omega^1 \times \Omega^2 \times \ldots \times \Omega^n$ и зависимости $P^i(\omega^i)$, и этим его знание о матрицах P^i исчерпывается.

Ее цель состоит в максимизации функции

$$f(v^1,v^2,...,v^n,\omega^1,\omega^2,...,\omega^n)=$$
$$=\min_{1\le j\le m}\frac{F_j^1(y_{1j}^1,y_{2j}^1,...,y_{kj}^1,\omega^1)+F_j^2(y_{1j}^2,y_{2j}^2,...,y_{kj}^2,\omega^2)+...+F_j^n(y_{1j}^n,y_{2j}^n,...,y_{kj}^n,\omega^n)}{\alpha_j}, \tag{8}$$

где $F_j^i(y_{1j}^i,y_{2j}^i,...,y_{kj}^i,\omega^i)=\min\limits_{1\le l\le k}\dfrac{y_{lj}^i}{p_{lj}^i(\omega^i)}$, а символами v^i для краткости обозначены наборы $v^i=(\mathbf{y}^i,z^i)$, где $z^i=(z_1^i,z_2^2,...,z_k^i)^T$ – вектор выделяемых подсистеме i ресурсов, а их распределение по технологиям описывается вектором $\mathbf{y}^i=(y_{11}^i,y_{21}^i,...,y_{k1}^i,y_{12}^i,y_{22}^i,...,y_{k2}^i,...,y_{1m}^i,y_{2m}^i,...,y_{km}^i)$.

Если оперирующая сторона осторожна, то перед ней стоит задача оптимизации

$$\min_{\omega\in\Omega} f(v^1,v^2,...,v^n,\omega^1,\omega^2,...,\omega^n)\to\max, \tag{9}$$

$$y_{l1}^i+y_{l2}^i+...+y_{lm}^j\le b_l^i+z_l^i, l=1,2,...,k, i=1,2,...,n, \tag{10}$$

$$z_l^1+z_l^2+...+z_l^n\le r_l, l=1,2,...,k, \tag{11}$$

$$y_{lj}^i\ge 0, i=1,2,...,n, l=1,2,...,k, j=1,2,...,m, \tag{12}$$

$$z_l^i\ge 0, i=1,2,...,n,\ l=1,2,...,k. \tag{13}$$

Обозначив через V множество наборов $(v^1,v^2,\dots,v^n)$, удовлетворяющих ограничениям этой задачи, можно записать решение этой задачи в виде

$$\breve{\gamma}=\max_{(v^1,v^2,...,v^n)\in V}\ \min_{\omega\in\Omega} f(v^1,v^2,...,v^n,\omega^1,\omega^2,...,\omega^n). \tag{14}$$

Максимизируемая функция может быть записана в виде

$$\min_{1\le j\le m}\ \min_{(\omega^1,\omega^2,...,\omega^n)\in\Omega}\frac{F_j^1(y_{1j}^1,y_{2j}^1,...,y_{kj}^1,\omega^1)+F_j^2(y_{1j}^2,y_{2j}^2,...,y_{kj}^2,\omega^2)+...+F_j^n(y_{1j}^n,y_{2j}^n,...,y_{kj}^n,\omega^n)}{\alpha_j}. \tag{15}$$

Поэтому эта задача эквивалентна следующей:

$$\gamma\to\max, \tag{16}$$

$$\min_{(\omega^1,\omega^2,...,\omega^n)\in\Omega}\left[F_j^1(y_{1j}^1,y_{2j}^1,...,y_{kj}^1,\omega^1)+F_j^2(y_{1j}^2,y_{2j}^2,...,y_{kj}^2,\omega^2)+...+F_j^n(y_{1j}^n,y_{2j}^n,...,y_{kj}^n,\omega^n)\right]\ge\gamma\alpha_j,$$
$$j=1,2,...,m, \tag{17}$$

$$y_{l1}^i+y_{l2}^i+...+y_{lm}^j\le b_l^i+z_l^i, l=1,2,...,k, i=1,2,...,n, \tag{18}$$

$$z_l^1+z_l^2+...+z_l^n\le r_l, l=1,2,...,k, \tag{19}$$

$$y_{lj}^i\ge 0, i=1,2,...,n, l=1,2,...,k, j=1,2,...,m, \tag{20}$$

$$z_l^i\ge 0, i=1,2,...,n,\ l=1,2,...,k. \tag{21}$$

Поскольку $\Omega=\Omega^1\times\Omega^2\times\ldots\times\Omega^n$, формула с минимизацией суммы для функций $F_j^i(y_{1j}^i,y_{2j}^i,...,y_{kj}^i,\omega^i)$ может быть записана в виде

$$\min_{\omega^1\in\Omega^1}F_j^1(y_{1j}^1,y_{2j}^1,...,y_{kj}^1,\omega^1)+\min_{\omega^2\in\Omega^2}F_j^2(y_{1j}^2,y_{2j}^2,...,y_{kj}^2,\omega^2)+...+\min_{\omega^n\in\Omega^n}F_j^n(y_{1j}^n,y_{2j}^n,...,y_{kj}^n,\omega^n)\ge\gamma\alpha_j,$$
$$j=1,2,...,m. \tag{22}$$

Функции $F_j^i(y_{1j}^i,y_{2j}^i,...,y_{kj}^i,\omega^i)$ вогнуты по переменным $(y_{1j}^i,y_{2j}^i,...,y_{kj}^i)$ при каждом фиксированном ω^i. Поэтому вогнуты и функции $\min\limits_{\omega^i\in\Omega^i}F_j^i(y_{1j}^i,y_{2j}^i,...,y_{kj}^i,\omega^i)$. Поэтому задача $\gamma\to\max$, при заданных ограничениях удовлетворяет всем условиям теоремы Куна–Такера. Согласно ей существует седловая точка функции Лагранжа

$$\gamma+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(F_j^1(y_{1j}^1,y_{2j}^1,...,y_{kj}^1,\omega^1)+F_j^2(y_{1j}^2,y_{2j}^2,...,y_{kj}^2,\omega^2)+...+F_j^n(y_{1j}^n,y_{2j}^n,...,y_{kj}^n,\omega^n)-$$
$$-\gamma\alpha_j)-\sum_{l=1}^{k}\mu_l(z_l^1+z_l^2+...+z_l^n-r_l), \tag{23}$$

где максимизация производится по переменным γ, y_{lj}^i $(i=1,2,...,n,\ l=1,2,...,k,\ j=1,2,...,m)$ и z_l (l = 1,2,…, k), удовлетворяющим ограничениям в условиях задачи оптимизации, а минимизация – по неотрицательным переменным λ_j (j = 1,2,…, m) и μ_l (l = 1,2,…, k) и решение $\breve{\gamma},\breve{y}_{lj}^i$ $(i=1,2,...,n,$ $l=1,2,...,k,\ j=1,2,...,m),\breve{z}_l$ $(l=1,2,...,k)$ задачи оптимизации является «максимизирующей компонентой» этой седловой точки.

В дальнейшем будет нужна еще одна величина. Предположим, что матрицы затрат $P^i(\omega^i)$ по-прежнему зависят от параметров ω^j и может реализоваться любое значение $(\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^n)\in\Omega$, но в момент выбора своего управления $(v^1,v^2,\ldots,v^n)$ оперирующая сторона будет знать реализовавшееся значение неопределенного фактора $(\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^n)$. Тогда она может гарантированно рассчитывать на получение результата

$$\widehat{\gamma}=\min_{\omega\in\Omega}\max_{(v^1,v^2,...,v^n)\in V} f(v^1,v^2,...,v^n,\omega^1,\omega^2,...,\omega^n). \tag{24}$$

Разумеется, $\widehat{\gamma}\ge\breve{\gamma}$ и в общем случае может быть и $\widehat{\gamma}>\breve{\gamma}$ (см. пример 2 ниже).

Понятно, что если любое значение неопределенного фактора $(\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^n)\in\Omega$ действительно может реализоваться, то никакой механизм управления не может позволить гарантированно получить результат больший, чем $\widehat{\gamma}$.

3 Децентрализованное управление в условиях неопределённости

Пусть теперь имеется n субъектов, которым известны реализовавшиеся значения неопределенных факторов $(\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^n)$. Можно считать, что субъект i знает значение неопределенного фактора ω^i.

Допустим, что оперирующая сторона доверяет субъекту i управление i-ой производственной системой. За собой оперирующая сторона оставляет выбор векторов цен $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)$, $\mu=(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_k)$ (по-прежнему считаем, что цены на продукцию положительны, а цены на ресурсы неотрицательны). При этом она рассчитывает, что субъект i преследует цель максимизации прибыли

$$h^i(u,v^i,\omega^i)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_jF_j^i(y_{1j}^i,y_{2j}^i,...,y_{kj}^i,\omega^i)-\sum_{l=1}^{k}\mu_lz_l^i. \tag{25}$$

Тогда можно считать, что при реализовавшемся значении неопределенного фактора ω^i субъект i выберет свое управление из множества

$$BR^i(u,\omega^i)=\left\{v^i\in V^i: h^i(u,v^i,\omega^i)=\max_{v'\in V^i}h^i(u,v',\omega^i)\right\}. \tag{26}$$

Определение. Число γ назовем достижимым результатом Центра в задаче децентрализованного управления, если существует стратегия Центра $u\in U$ и для любого $\omega\in\Omega$ найдутся стратегии игроков нижнего уровня $v^i\in BR^i(u,\omega^i)$ (i = 1,2,…, n) для которых выполняются условия $z_l^1+z_l^2+...+z_l^n\le r_l$ $(l=1,2,...,k)$ и $f(v^1,v^2,\ldots,v^n,\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^n)\ge\gamma$. Точная верхняя грань $\tilde{\gamma}$ достижимых результатов Центра называется его максимальным достижимым результатом.

Будем оценивать эффективность децентрализованного способа управления максимальным достижимым результатом Центра. В этом определении заложено предположение о доброжелательности игроков нижнего уровня к Центру и наличие некоего механизма выбора согласованных действий, обеспечивающего выполнение ограничений по наличию централизованных ресурсов. Наличие такого механизма можно рассматривать также как некую доброжелательность по отношению к Центру, который можно считать «отвечающим» за выполнение этих ограничений.

Пример 1. Пусть n = 1, m = 2, k = 2, $b_1^1=2$, $b_2^1=3$, $r_1=r_2=0$, $\Omega^1=\{1,2\}$, $p_{1j}^1(\omega^1)=1$ при j = 1,2 и любом $\omega^1\in\Omega^1$, $p_{21}^1(\omega^1)=1-\omega^1$, $p_{22}^1(\omega^1)=\omega^1$, $\alpha_1=\alpha_2=1$.

Обратимся к задаче централизованного управления. Пусть $\mathbf{y}^1=(y_{11}^1,y_{21}^1,y_{12}^1,y_{22}^1)$, $\vec{\mathbf{y}}^1=(y_{12}^1,y_{22}^1,y_{11}^1,y_{21}^1)$, $z^1=(0,0), v^1=(\mathbf{y}^1,z^1)$, $\vec{v}=(\vec{\mathbf{y}}^1,z^1)$. Тогда в силу симметрии задачи

$f(v^1,1)=f(\vec{v}^1,2)$ и потому $\min\limits_{\omega\in\Omega} f(v^1,\omega)=\min\limits_{\omega\in\Omega} f(\vec{v}^1,\omega)$. Значит, если v^1 – оптимальный выбор оперирующей стороны, то и $\vec{v}$ – тоже оптимальный выбор.

Но тогда в силу выпуклости задачи $\bar{v}^1=\dfrac{v^1+\vec{v}^1}{2}$ будет оптимальным выбором. Поэтому оптимальные выборы можно искать среди стратегий $v^1=(\mathbf{y}^1,z^1)$, в которых $y_{11}^1=y_{12}^1$ и $y_{21}^1=y_{22}^1$.

Следовательно, в силу монотонности оптимальной является стратегия с $\mathbf{y}^1=(1,1.5,1,1.5)$ и $z^1=(0,0)$ и максимальный гарантированный результат $\breve{\gamma}$ равен 0.75.

Теперь рассмотрим задачу децентрализованного управления.

Фиксируем цены u так, что $\lambda_1=\lambda_2=1$ и $\mu_1=\mu_2=1$ (от последних в данном примере, разумеется, ничего не зависит). Рассмотрим для определенности случай $\omega^1=1$.

Стратегия $\bar{v}^1$, у которой $\bar{y}_{11}^1=\bar{y}_{12}^1=1,\bar{y}_{21}^1=2,\bar{y}_{22}^1=1,\bar{z}_1^1=\bar{z}_2^1=0$, обеспечивает игроку выигрыш, равный 2. С другой стороны, для любой стратегии v^1 имеем

$$h(u,v^1,\omega^1)=F_1^1(y_{11}^1,y_{21}^1)+F_2^1(y_{12}^1,y_{22}^1)\le y_{11}^1+y_{12}^1\le 1. \tag{27}$$

Значит, $\bar{v}^1\in BR^1(u,\omega^1)$ и при этом игрок верхнего уровня получает выигрыш, равный 1.

Аналогично рассматривается случай $\omega^1=2$. Поэтому применение выбранной стратегии u гарантирует оперирующей стороне получение выигрыша, равного 1, в случае доброжелательности партнера.

С другой стороны, при любых v^1 и ω^1 имеем

$$f(v^1,\omega^1)=\min\{F_1^1(y_{11}^1,y_{21}^1),F_2^1(y_{12}^1,y_{22}^1)\}\le\min\{y_{11}^1,y_{12}^1\}\le 1 \tag{28}$$

(последнее неравенство верно, так как $y_{11}^1+y_{12}^1\le 2$). Значит, стратегия u, у которой $\lambda_1=\lambda_2=1$ и $\mu_1=\mu_2=1$, является оптимальной. Кроме того, отсюда следует, что $\hat{\gamma}=1$.

Таким образом, в данном примере оперирующая сторона при децентрализованном управлении может получить строго больше, чем при централизованном.

Пример 2. Пусть $n=1$, $m=2$, $k=1$, $b_1^1=b_2^2=4$, $r_1=r_2=0$, $\Omega^1=\{1,2\}$, $p_{11}^1(1)=1$, $p_{12}^1(1)=2$, $p_{11}^1(2)=2, p_{12}^1(2)=1$, $\alpha_1=\alpha_2=1$.

В этом примере, разумеется, $z_1^1=z_2^1=0$ и выбору подлежат только переменные y_{11}^1 и y_{12}^1.

Начнем с варианта централизованного управления. Цель оперирующей стороны состоит в максимизации функции

$$\min_{\omega^1\in\Omega^1} f(v^1,\omega^1)=\min_{\omega^1\in\{1,2\}}\min_{j\in\{1,2\}}\frac{y_{1j}^1}{p_{1j}^1(\omega^1)}. \tag{29}$$

Эта формула переписывается в виде

$$\min_{\omega^1\in\Omega^1} f(v^1,\omega^1)=\min_{j\in\{1,2\}}\min_{\omega^1\in\{1,2\}}\frac{y_{1j}^1}{p_{1j}^1(\omega^1)}=\min_{j\in\{1,2\}}\frac{y_{1j}^1}{2}. \tag{30}$$

Теперь в силу симметрии видно, что в точке оптимума $y_{11}^1=y_{12}^1$, а в силу монотонности максимизируемой функции в точке максимума $y_{11}^1+y_{12}^1=4$. Отсюда $y_{11}^1=y_{12}^1=2$ и

$$\breve{\gamma}=\max_{v^1\in V^1}\min_{\omega^1\in\Omega^1} f(v^1,\omega^1)=1. \tag{31}$$

Для полноты рассмотрим вариант с управлением в условиях полной информации. Если $\omega^1=1$, то выбрав $y_{11}^1=\dfrac{4}{3},\ y_{12}^1=\dfrac{8}{3}$ (несложно показать, что такой выбор оптимален), оперирующая сторона обеспечит себе выигрыш, равный $\dfrac{4}{3}$. В случае $\omega^1=2$ выбор $y_{11}^1=\dfrac{8}{3},\ y_{12}^1=\dfrac{4}{3}$ тоже обеспечивает оперирующей стороне выигрыш, равный $\dfrac{4}{3}$. Поэтому в данном примере $\hat{\gamma}(=\dfrac{4}{3})>\breve{\gamma}$.

Теперь обратимся к задаче децентрализованного управления.

В данном примере функция $h^1(u,v^1,\omega^1)$ линейно зависит от переменной v^1, поэтому непосредственно проверяется, что при $\omega^1=1$

$$BR^1(u,1)=\begin{cases}(0,4),\text{ если } 2\lambda_1<\lambda_2,\\ B,\text{ если } 2\lambda_1=\lambda_2,\\ (4,0)\ 2\lambda_1>\lambda_2,\end{cases} \tag{32}$$

где $B=\{(y_{11}^1,y_{12}^1): y_{11}^1+y_{12}^1=4, y_{11}^1\ge 0, y_{12}^1\ge 0\}$. Поэтому при $2\lambda_1\ne\lambda_2$ и рациональном выборе игрока нижнего уровня одна из переменных y_{11}^1 или y_{12}^1 равна нулю, и, значит, равен нулю выигрыш Центра.

Аналогично, при $\omega^1 = 2$ и рациональном выборе второго игрока выигрыш центра заведомо равен нулю при $\lambda_1\ne 2\lambda_2$.

А поскольку условия $2\lambda_1\ne\lambda_2$ и $\lambda_1\ne 2\lambda_2$ при положительных ценах λ_1 и λ_2 несовместны, Центр не может рассчитывать на получение положительного выигрыша.

Таким образом, в данном примере при централизованном способе управления оперирующая сторона гарантированно получает строго больший выигрыш, чем при децентрализованном.

Итак, приходим к следующему выводу: при наличии неопределенности более выгодным может оказаться и централизованный и децентрализованный способ управления системой (в зависимости от параметров модели).

4 Механизмы согласования выборов решений

Принципиальным вопросом при децентрализации управления, поскольку решение игроками нижнего уровня принимаются независимо, становится выбор механизма, обеспечивающего определенную согласованность этих решений с тем, чтобы запрашиваемых ресурсов хватило всем. Разумеется, для того, чтобы этот механизм был действенным, необходимо, чтобы его использование было добровольным.

Можно предложить много такого рода механизмов. Обсудим пару из них.

В первом из них будем считать, что некий субъект доводит до игроков нижнего уровня рекомендации, какие объемы централизованных ресурсов хорошо бы использовать при каждом значении неопределенного фактора. Если при реализовавшемся значении неопределенного фактора и при каком-то рациональном ответе игрока на выбранную стратегию центра эти рекомендации выполняются, то именно этот рациональный ответ и будет выбран игроком. В противном случае игрок выбирает свой рациональный ответ так, как будто этих рекомендаций нет вовсе.

Чтобы не плодить субъектов, можно считать, что рекомендации выдает Центр. По существу это ничего не меняет. Можно было бы считать, что рекомендации вырабатывает один из игроков нижнего уровня (и доводит до всех остальных), или, что их выбирает какой-то внешний арбитр.

Формализуется это следующим образом.

Пусть Z – множество наборов $(z^1,z^2,\ldots,z^n)$ l-мерных векторов с неотрицательными компонентами, удовлетворяющих условиям $z^1 + z^2 + \ldots + z^n \le r$ (неравенство выполняется покомпонентно). Далее пусть $\tilde{Z}$ – множество всех функций, отображающих множество Ω в Z. Положим $\tilde{U}=U\times\tilde{Z}$.

Пусть $\tilde{\zeta}(\omega)=\left(\tilde{\zeta}^1(\omega),\tilde{\zeta}^2(\omega),\ldots,\tilde{\zeta}^n(\omega)\right)\in\tilde{Z}$ и $\tilde{u}=(u,\tilde{\zeta})\in\tilde{U}=U\times\tilde{Z}.$ Определим множество $BR^i(\tilde{u},\omega^i)$ следующими условиями: если существует $\mathbf{y}^i$ такой, что $(\mathbf{y}^i,\tilde{\zeta}^i(\omega^i))\in BR^i(u,\omega^i),$ то $BR^i(\tilde{u},\omega^i)=\{(\mathbf{y}^i,z^i)\}$, а в противном случае $BR^i(\tilde{u},\omega^i)=BR^i(u,\omega^i)$.

Положим

$$\hat{\gamma}=\sup_{\tilde{u}\in\tilde{U}}\inf_{\omega\in\Omega}\max_{v^1\in BR^1(\tilde{u},\omega^1)}\max_{v^2\in BR^2(\tilde{u},\omega^2)}\ldots\max_{v^n\in BR^n(\tilde{u},\omega^n)} f(v^1,v^2,\ldots,v^n,\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^n). \tag{33}$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма. Величина $\hat{\gamma}$ не может быть меньше максимального достижимого результата Центра в задаче децентрализованного управления.

Доказательство. Пусть $\tilde{\gamma}$ – максимальный достижимый результат в задаче децентрализованного управления, а ε – произвольное положительное число. Тогда по определению существует стратегия Центра $u\in U$ и для любого $\omega\in\Omega$ найдутся стратегии игроков нижнего уровня $v^i = (\mathbf{y}^i,z^i)\in BR^i(u,\omega^i)$ $(i = 1,2,\ldots, n)$, для которых выполняются условия $z_l^1+z_l^2+\ldots+z_l^n\le r_l$ $(l=1,2,\ldots,k)$ и $f(v^1,v^2,\ldots,v^n,\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^n)\ge\tilde{\gamma}-\varepsilon$. Для каждого ω положим $\tilde{\zeta}(\omega)$ равным именно такому набору $(z^1,z^2,\ldots,z^n)\in Z$ и пусть $\tilde{u}=(u,\tilde{\zeta})$.

Тогда при любом $\omega\in\Omega$ выполняется включение $(\mathbf{y}^i,z^i)\in BR^i(u,\omega^i)$, а, значит, $BR^i(\tilde{u},\omega^i)=\{(\mathbf{y}^i,z^i)\}$.

Но тогда

$$\max_{v^1\in BR^1(\tilde u,\omega^1)}\max_{v^2\in BR^2(\tilde u,\omega^2)}...\max_{v^n\in BR^n(\tilde u,\omega^n)} f(v^1,v^2,...,v^n,\omega^1,\omega^2,...,\omega^n)=f(v^1,v^2,...,v^n,\omega^1,\omega^2,...,\omega^n)\ge\tilde\gamma-\varepsilon. \quad (34)$$

В силу произвольности ω отсюда следует

$$\inf_{\omega\in\Omega}\max_{v^1\in BR^1(\tilde u,\omega^1)}\max_{v^2\in BR^2(\tilde u,\omega^2)}...\max_{v^n\in BR^n(\tilde u,\omega^n)} f(v^1,v^2,...,v^n,\omega^1,\omega^2,...,\omega^n)\ge\tilde\gamma-\varepsilon, \quad (35)$$

и тем более

$$\hat\gamma=\sup_{\tilde u\in\tilde U}\inf_{\omega\in\Omega}\max_{v^1\in BR^1(\tilde u,\omega^1)}\max_{v^2\in BR^2(\tilde u,\omega^2)}...\max_{v^n\in BR^n(\tilde u,\omega^n)} f(v^1,v^2,...,v^n,\omega^1,\omega^2,...,\omega^n)\ge\tilde\gamma-\varepsilon. \quad (36)$$

Тогда в силу произвольности ε выполняется и неравенство $\hat\gamma\ge\tilde\gamma$.

Лемма доказана.

По ходу доказательства установлено, что в описанной игре у Центра имеется такая стратегия, которая позволяет при доброжелательном отношении партнеров гарантированно получить выигрыш, сколь угодно близкий к $\tilde\gamma$, и при этом не нарушить баланса ресурсов.

Замечание. Ничего не изменится, если в определении величины $\hat\gamma$ заменить максимумы на минимумы, хотя это и не очень логично.

В теории иерархических игр [7] и теории активных систем (подробный обзор см. в [8]) часто используют конструкции несколько иного вида. А именно, рассматриваются игры, в которых игроки нижнего уровня могут передать Центру имеющуюся у них информацию о внешнем неопределенном факторе. Предполагается, что эта информация может быть недостоверной и Центр не имеет возможности ее верифицировать. Таким образом, игроки нижнего уровня в определенных пределах могут манипулировать выборами Центра, т.е. по сути, принимать решения за него.

Подобные конструкции можно использовать и в задаче децентрализованного управления. Формализуется это следующим образом.

Будем считать, что Центр, помимо выбора цен u, выбирает еще и распределение $(z^1,z^2,\dots,z^n)\in Z$ централизованных ресурсов по подсистемам. Но цены он выбирает, не используя дополнительной информации, а вектор $(z^1,z^2,\dots,z^n)$ выбирается на основе информации о неопределенных факторах, передаваемой ему другими игроками.

Игрок нижнего уровня i выбирает распределение $\mathbf{y}^i$ доступных ему ресурсов по видам производимой продукции, а также сообщение $\varpi^i\in\Omega^i$ о реализовавшемся неопределенном факторе ω^i.

Таким образом, множество стратегий $\bar{\bar V}^i=Y^i(z^i)\times\Omega$, где $Y^i(z^i)$ – это множество наборов $\mathbf{y}^i=(y^i_{11},y^i_{21},...,y^i_{k1},y^i_{12},y^i_{22},...,y^i_{k2},...,y^i_{1m},y^i_{2m},...,y^i_{km})$, удовлетворяющих условиям

$$y^i_{l1}+y^i_{l2}+...+y^j_{lm}\le b^i_l+z^i_l,\ l=1,2,...,k, \quad (37)$$

$$y^i_{lj}\ge 0,\ l=1,2,...,k,\ j=1,2,...,m. \quad (38)$$

Множество стратегий Центра есть $\bar{\bar U}=U\times\tilde Z$. А выигрыши игроков определяются условиями

$$\bar{\bar h}^i(\bar{\bar u},\bar{\bar v}^i,\omega^i)=\sum_{j=1}^m\lambda_jF^i_j(y^i_{1j},y^i_{2j},...,y^i_{kj},\omega^i)-\sum_{l=1}^k\mu_l\tilde\zeta^i_l(\varpi^i), \quad (39)$$

$$\bar{\bar g}(\bar{\bar u},\bar{\bar v}^1,\bar{\bar v}^2,...,\bar{\bar v}^n,\omega^1,\omega^2,...,\omega^n)=$$
$$=\min_{1\le j\le m}\frac{F^1_j(y^1_{1j},y^1_{2j},...,y^1_{kj},\omega^1)+F^2_j(y^2_{1j},y^2_{2j},...,y^2_{kj},\omega^2)+...+F^n_j(y^n_{1j},y^n_{2j},...,y^n_{kj},\omega^n)}{\alpha_j}, \quad (40)$$

где $\bar{\bar u}=(u,\tilde\xi),\bar{\bar v}^i=(\mathbf{y}^i,\varpi^i)$.

Определим множества

$$BR^i(\bar{\bar u},\omega^i)=\left\{(\mathbf{y}^i,\varpi^i):\varpi^i\in\Omega^i,\mathbf{y}^i\in Y^i(\tilde\zeta(\varpi^i)),\bar{\bar h}(\bar{\bar u},\bar{\bar v},\omega^i)=\max_{\varpi^i\in\Omega^i}\max_{\mathbf{y}^i\in Y^i(\tilde\zeta(\varpi^i))}\bar{\bar h}(\bar{\bar u},\bar{\bar v},\omega^i)\right\}. \quad (41)$$

Рассмотрим величину

$$\bar{\bar\gamma}=\sup_{\bar{\bar u}\in\bar{\bar U}}\inf_{\omega\in\Omega}\max_{\bar{\bar v}^1\in BR^1(\bar{\bar u},\omega^1)}\max_{\bar{\bar v}^2\in BR^2(\bar{\bar u},\omega^2)}...\max_{\bar{\bar v}^n\in BR^n(\bar{\bar u},\omega^n)} g(\bar{\bar u},\bar{\bar v}^1,\bar{\bar v}^2,...,\bar{\bar v}^n,\omega^1,\omega^2,...,\omega^n). \quad (42)$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма. Справедливо неравенство $\bar{\bar{\gamma}} \geq \tilde{\gamma}$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству предыдущей.

Замечание. В теории иерархических игр [7] и теории активных систем [8] подобные обмены неверифицируемой информацией существенны уже в играх с одним игроком нижнего уровня. В нашем случае согласование действий в таких простых играх, разумеется, не нужно.

Приведенные примеры показывают, что достаточно разумные примеры взаимовыгодных механизмов согласования решений существуют. И, видимо, подобные механизмы работают на практике. Но пользоваться конструкциями из предыдущего раздела, вероятно, удобнее, поскольку они позволяют получать качественные (а, может быть, и количественные) выводы без учета малосущественных деталей.

Заключение

Пример 2 показывает, что при использовании всего одного ресурса (денег) результат центра в случае децентрализованного управления оказывается нулевым. В какой-то степени это является следствием того, что имеется всего один игрок нижнего уровня. В общем случае ситуация может оказаться заметно лучше (за счет специализации предприятий).

В [2] целесообразность децентрализации управления для оперирующей стороны связывается с ее недостаточной информированностью. В примере 1 мы видим ровно этот эффект: целесообразность децентрализации обусловлена тем, что подсистемы лучше информированы о внешней среде, чем оперирующая сторона.

Аналогичный эффект проявляется и в моделях из работ [9 - 10]. Но «механизм» проявления этого эффекта несколько иной. Во-первых, в моделях из [9 - 10] вводится количественное ограничение на объем используемой информации. В данном докладе имеется качественное ограничение на доступную информацию. А во-вторых, в данном докладе при децентрализации система меняется более существенно. А именно, появляются новые управляющие переменные – цены.

Давно известно (см., например, [11]), что в условиях полной информации использование цен в качестве управлений может позволить получить одинаковый результат как при централизованном, так и при децентрализованном способах управления. Тот факт, что децентрализованное управление на практике встречается повсеместно, говорит, пожалуй, о том, что этот способ более эффективен, что и согласуется с результатами, полученными в докладе. Поэтому исследование такого рода моделей представляется актуальным.

Выше рассмотрены лишь два крайних случая: оперирующая сторона либо совсем не имеет информации о неопределенном факторе, либо имеет полную информацию о нем. В промежуточных случаях все может оказаться более содержательно. Согласно принципу, изложенному в [12], необходимый объем получаемой информации в значительной степени определяется сложностью множеств управлений оперирующей стороны. В случае децентрализованного управления размерность множества управлений центра равна $k + n$, а в случае централизованного она равна $knm+kn$. Разница очевидна.

Литература

1. *Месарович М., Мако Д., Такахара И.* Теория иерархических многоуровневых систем. М.: Мир, 1973. – 344 с.
2. *Гермейер Ю.Б., Моисеев Н.Н.* О некоторых задачах теории иерархических систем. // Проблемы прикладной математики и механики. М.: Наука, 1971. – С. 30-43.
3. *Ватель И.А., Ерешко Ф.И.* Игры с иерархической структурой. // Математическая энциклопедия. Т. 2. М.: Советская энциклопедия, 1979. – С. 478-482.
4. *Горелов М.А.* Максимальный гарантированный результат в иерархических играх // Управление большими системами. Вып. 67. М.: ИПУ РАН, 2017. – С. 4-31.
5. *Горелов М.А.* Иерархические игры с неопределенными факторами // Управление большими системами. Вып. 59. М.: ИПУ РАН, 2016. – С. 6-22.
6. *Горелов М.А., Ерешко Ф.И.* О моделях централизации и децентрализации управления в цифровом обществе // Контуры цифровой реальности: Гуманитарно-технологическая революция и выбор будущего / Под ред. В.В. Иванова, Г.Г. Малинецкого, С.Н. Сиренко. М.: Ленанд, 2018. – С. 187-202.
7. *Горелик В.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф.* Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. М.: Радио и связь, 1991. – 288 с.
8. *Бурков В.Н., Еналеев А.К., Коргин Н.А.* Согласованность и неманипулируемость механизмов

организационного управления: текущее состояние проблемы, ретроспектива, перспективы развития теоретических исследований // Автоматика и телемеханика. 2021. № 7. – С. 5-37.
9. *Горелов М.А., Ерешко Ф.И.* Информированность и децентрализация управления // Автоматика и телемеханика. 2019. № 6. – С. 156-172.
10. *Горелов М.А., Ерешко Ф.И.* Информированность и децентрализация управления (стохастический случай) // Автоматика и телемеханика. 2020. № 1. – С. 52-66.
11. *Кононенко О.В.* Математическое моделирование экономических механизмов взаимодействия между водохозяйственными и сельскохозяйственными предприятиями // Вестник с/х науки. 1981. № 2. – С. 19-23.
12. *Горелов М.А*. Принятие решений при избытке информации. Управление развитием крупномасштабных систем // Труды тринадцатой международной конференции. М.: ИПУ РАН, 2020. – С. 536-546.