DOI: 10.25728/mlsd.2022.0209

КВАНТОВОПОДОБНЫЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ И ОБЩЕСТВЕННЫХ НАУКАХ

Словохотов Ю.Л.
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, г. Москва ул. Профсоюзная д.65
yurislovo@yandex.ru, slov@ipu.ru

Аннотация: Краткий обзор основных приложений аппарата квантовой механики к описанию биржи, теории игр и моделированию принятия решений показывает имитационный характер предлагаемых моделей, основанных на «отмене» фундаментальных положений физики. Тем не менее, гибкие квантовоподобные модели сохраняют перспективы в описании социальных систем.

Ключевые слова: квантовые модели биржи, квантовая теория игр, квантовая когнитивистика, обзор.

Введение

Основной постулат неоклассических теорий экономики и общественных наук о рациональном стремлении агентов (*homo economicus*) к максимуму полезности был экспериментально опровергнут во второй половине XX века. В психологических экспериментах по имитации экономической деятельности людей в условиях неопределенности были выявлены принципиальные отклонения испытуемых от рационального поведения [1]. Исследования в области когнитивных наук на стыке экономики, психологии и теории принятия решений составили основу *поведенческой экономики* (англ. *behavioral economy*). Одним из ее основных принципов является *ограниченная рациональность* (*bounded rationality*) экономических агентов. Большой фактический материал в этом направлении предоставляет деятельность биржи (*behavioral finance*) [2].

В ряде работ последних десятилетий «случайное» и коррелированное поведение экономических агентов описывают соотношениями, заимствованными из квантовой механики. В этом строго не обоснованном, но популярном междисциплинарном разделе наук об обществе можно выделить три направления: (1) квантовомеханические модели биржи, (2) развитие квантовой теории игр и (3) «квантовоподобное» моделирование принятия решений. К этим направлениям примыкают модели социологии и лингвистики [3], также использующие методы квантовой механики.

В статье представлен краткий обзор основных приложений квантовомеханического аппарата в экономических и общественных науках вместе с критикой подобных работ. Сделан довольно очевидный вывод о невозможности прямого переноса методов квантовой физики в экономические и общественные дисциплины. Менее тривиальны преимущества квази-квантового формализма, основанного на *отказе* от законов физики, в моделировании социальных систем. Этот аппарат (в частности, комплексные «волновые функции») оказывается более универсальным и гибким по сравнению с традиционными математическими моделями.

1 Постулаты квантовой физики

1.1 Базовые соотношения квантовой механики

Основу квантовой механики составляет описание состояния физической системы через плотность вероятности $\rho(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ (где $\mathbf{q}$ – вектор обобщенных координат, $\mathbf{p}$ – вектор обобщенных импульсов, t – время), равную квадрату комплекснозначной волновой функции $\psi(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$. Для системы, в каждый момент времени обладающей определенной энергией, волновая функция является решением уравнения Шредингера. В одномерном случае

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi, \quad (1)$$

где H – оператор Гамильтона (гамильтониан), x – координата системы (частицы), m – ее масса, $\hbar$=6.626×10^{-34} дж·с – постоянная Планка, i – мнимая единица (i^2=–1). В выражении для гамильтониана первое слагаемое соответствует кинетической энергии частицы, действительная функция $V(x)$ – потенциальной энергии (потенциалу) системы. При $\partial\psi/\partial t$=0 волновая функция частицы в трехмерном пространстве имеет вид

$$\psi = Ce^{-\frac{i}{\hbar}(Et-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})}, \quad (2)$$

где $p_x=i\hbar\partial/\partial x$, $p_y=i\hbar\partial/\partial y$, $p_z=i\hbar\partial/\partial z$ – компоненты импульса, а (1) переходит в стационарное уравнение Шредингера

$$\mathcal{H}\psi = E\psi, \tag{3}$$
(E – сохраняющаяся энергия системы). Решением уравнения (3) при заданных краевых условиях является множество волновых функций $\{\psi_k\}$ и их собственных значений энергии $\{E_k\}$.

Квантовые системы могут находиться в дискретных связанных состояниях (если потенциал $V(x)$ обладает минимумом) и (или) в континууме состояний «свободного движения». Величины энергии и других измеряемых физических величин в состоянии ψ_k задаются действительными собственными значениями эрмитовых операторов в гильбертовом пространстве волновых функций.

Масштабный множитель $\hbar$ в (1-3) позволяет непосредственно применять квантовомеханический формализм лишь к описанию микроскопических (субатомных, атомных и молекулярных) систем, где он дает количественное согласие с экспериментальными данными. Общеизвестными квантовыми эффектами в таких системах являются линейчатые спектры испускания и поглощения энергии при переходах между дискретными состояниями, а также волновые свойства потока частиц с определенной энергией (например, монохроматического света или моноэнергетического пучка электронов). При рассеянии таких потоков на объектах, сравнимых по размерам с длиной волны, из-за сложения комплексных волновых функций $\psi_i + \psi_j$ возникает интерференционная картина. Системы с более крупным масштабом расстояний и масс подчиняются классической механике.

На операторы и волновые функции физической квантовой системы накладывается ряд строгих взаимосвязанных ограничений

- $\langle\psi|\psi\rangle = \int \psi^* \psi dq = P, 0 \leq P \leq 1$ (нормировка)
- измеряемым величинам отвечают эрмитовы операторы, их собственные значения действительны
- операторные уравнения линейны
- собственные функции операторов $\{\psi_i\}$ образуют полный набор: любая $\varphi = \sum c_i \psi_i$
- краевые условия (например, на бесконечно высоком потенциальном барьере $\psi \equiv 0$)
- сохраняющиеся величины (энергия E в стационарной квантовой системе и др.)

При выполнении этих условий ё комплексная нормированная волновая функция ψ определяет положительную вероятность $0 \leq P \leq 1$ состояния системы с заданным набором измеримых параметров $\{a_i^{(k)}\}$: собственных значений эрмитовых операторов $\{\hat{A}_k\}$. Важно отметить, что волновая функция ψ непрерывна, подобно функциям состояния системы в классической математической физике. Если заменить ψ непрерывной действительной функцией и проигнорировать мнимую единицу, (1) переходит в уравнение параболического типа, а (3) – в задачу о стоячих волнах.

Поскольку волновая функция позволяет рассчитать вероятности, она отвечает не единичной квантовой системе, а статистике данных по большому числу однотипных систем. В этом случае из (2) следуют соотношения неопределенностей «координата-импульс» и «время-энергия»

$$\delta x \delta p_x \geq \hbar/2, \qquad \delta y \delta p_y \geq \hbar/2, \qquad \delta z \delta p_z \geq \hbar/2, \qquad \delta E \delta t \geq \hbar/2, \tag{4}$$

справедливые для *ансамбля* одинаковых квантовых систем. Так, например, для единичного атома ширина возбужденного состояния δE и время его жизни δt очевидно не имеют смысла, тогда как средним временем жизни возбужденного состояния в ансамбле атомов определяется естественная ширина спектральных линий.`

1.2 Квантовая запутанность и другие нефизические положения

Статистическая интерпретация формализма квантовой механики (в частности, соотношений (4)) по ряду причин оставалась не вполне общепринятой вплоть до ее экспериментального подтверждения в конце XX века. При буквальной (т. наз. «точной») интерпретации волновая функция описывает единичную квантовую систему и формулы (4) выражают не соотношение дисперсий измеряемых величин, а фундаментальный физический закон. Одним из следствий этой схемы стал «принцип дополнительности», декларирующий неустранимое (и обычно разрушительное) влияние любых измерений на состояние квантового объекта. В полемике ведущих физиков в 1930-е годы Альбертом Эйнштейном был сформулирован парадокс: для пары частиц, связанных законом сохранения, измерение состояния одной частицы дает точную информацию также и о состоянии второй частицы, над которой измерение не производилось.

В мысленном эксперименте «парадокса Эйнштейна-Подольского-Розена», или «парадокса ЭПР» (который является парадоксом только при «буквальной» интерпретации квантовой механики) измерение импульса или спина одной «половины» распавшегося атомного ядра дает точную информацию об аналогичном параметре другой половины. Неоднократные физические эксперименты (чаще всего с фотонами левой и правой поляризации в качестве «сцепленных» частиц) не опровергли законов сохранения, но породили развернутую квази-философскую терминологию. В ее рамках связь параметров квантовых частиц через законы сохранения называется «квантовой запутанностью» (entanglement), а регистрацию параметра одной из связанных частиц (такого как «правая» или «левая» спиральность коррелированных фотонов, до момента измерения имеющие вероятности ½) называют «коллапсом волновой функции» и «квантовой телепортацией», то есть распространением информации о спиральности второго фотона со сверхсветовой скоростью. Эти умозрительные нефизические конструкции весьма типичны для междисциплинарных приложений аппарата квантовой механики в общественных дисциплинах, т.е. за пределами собственно физики.

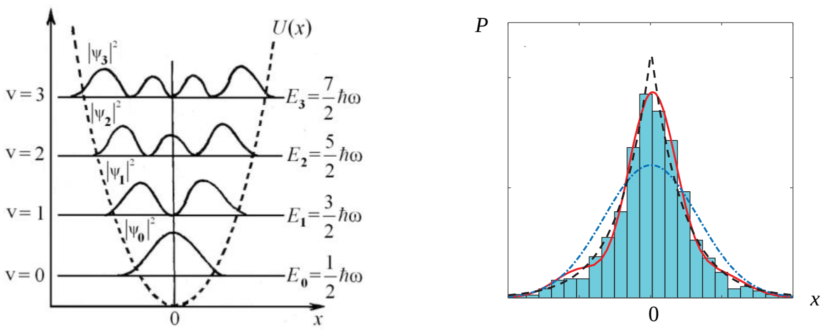
2 Квантовые модели и квантовоподобные метафоры в науках об обществе

Стремление использовать квантовую физику для описания процессов в обществе в первой половине XX века было вызвано некоторыми аналогиями таких процессов с динамикой квантовых систем [4]. Эти аналогии (интерференция состояний, дуализм волна-частица, туннелирование квантовой системы сквозь потенциальный барьер и др.), сформулированные на вербальном уровне, до сих пор применяются в общественных науках как метафоры. В этой статье мы рассмотрим те работы, где «квантовый» аппарат использован для математического описания социальных систем (в том числе в экономике). Тем не менее, во многих из них вместо экспериментально проверяемых моделей также обсуждаются лишь качественные аналогии квантовомеханических и социальных процессов – то есть квантовоподобные метафоры. При этом, например, расчетное моделирование биржи на основе квантовомеханических конструкций парадоксальным образом достигает успеха после отказа от их основного физического содержания.

2.1 Квантовые модели биржи

В описании экономических и социальных систем главным требованием к модели, заимствованной из физики, является ее удовлетворительное согласие с серией данных и возможность улучшить это согласие введением дополнительных «подгоночных» параметров. Поэтому принципиальная возможность или невозможность переносить закономерности физики атомов и молекул на такой безусловно макроскопический объект, как биржа, в финансовой математике не обсуждается. Имитационные модели как подгоночные схемы на основе формализма квантовой механики, но без сохраняющихся величин и иных физических ограничений действительно оказываются очень гибкими.

В ряде работ распределение стоимости биржевых активов описывали на основе волновых функций линейного гармонического осциллятора [5]. Этой физической модели отвечает уравнение (3) для материальной точки массы m в квадратичном потенциале $V=kx^2$, для нее уравнение Шредингера решается точно. Бесконечному набору дискретных состояний с эквидистантными уровнями энергии $\{E_n=\hbar\omega(n+1/2)\}$ $(\omega = \sqrt{k/m}, n = 0, 1, 2, \ldots)$ соответствуют волновые функции $\{\psi_n\}$ на основе полиномов Эрмита, распределение материальной точки по координате x задает стоячая волна плотности вероятности $\rho_n(x)=|\psi_n(x)|^2$ (рис. 1 а).



(а) (б)

Рис.1. Квантовый гармонический осциллятор: (а) квадраты волновых функций, (б) распределение доходности актива [5]

Отождествляя координату x с логарифмической доходностью актива

$$x = r(t) = \frac{A}{\tau}\ln[S(t+\tau)/S(t)] \quad (5)$$

(где S – цена актива, τ – инкремент времени, т.е. число торговых дней между ценами закрытия биржи, A – эмпирический множитель), авторы [5] с хорошей точностью воспроизвели распределение доходности индекса акций All Shares английской биржи FTSE за семилетний период с 2007 по 2014 г. (красный сплошной контур на рис. 1 б). Сдвиг плотности вероятности x в возбужденных состояниях осциллятора от центра к периферии (см. рис. 1 а) позволил воспроизвести негауссову асимптотику распределения: «тяжелые хвосты».

Применимость модели гармонического осциллятора (как и других схем квантовой физики) к описанию биржи физически необоснованна. В отличие от осциллятора, биржа не является замкнутой консервативной системой, формула (5) соответствует не «ценовой координате», а скорости изменения цены, «потенциал» биржи и произвольно выбранный набор «уровней энергии» не отвечают регистрируемым величинам и т.д. Однако гибкость квантовоподобного аппарата, освобожденного от физического содержания, позволяет строить на его основе имитационные модели, которыми хорошо воспроизводятся реальные данные. Наиболее последовательно и успешно этот подход реализован в работах и книгах Билала Бааки, где формализм квантовой механики последовательно применен к описанию динамики цен финансовых активов, включая квантование уравнений Блэка-Шоулза и Фоккера-Планка, вывод операторов Гамильтона и Лагранжа для финансовых моделей, использование фейнмановских интегралов по траекториям и мн. др. [6].

«Квантово-имитационные» экономические и биржевые модели противоречат фундаментальным понятиям квантовой физики. Помимо несохранения «энергии» (изменений цен активов) и игнорирования ключевых масштабных множителей (постоянной Планка), в них фигурируют действительные волновые функции при комплексных собственных значениях «гамильтониана» или «мнимое время» it. Успех применения таких моделей объясняется именно этими нарушениями, которые переводят уравнение Шредингера (1) в модифицированные уравнения стохастической физики [7] (также см. выше). Модели на основе модифицированного уравнения Фоккера-Планка давно и успешно применяются к предсказанию биржевой динамики [2].

2.2 Квантовая теория игр

С начала XXI века растет популярность *квантовых игр*, где в построении платежных матриц и стратегий используются соотношения, перенесенные из квантовой механики. Физическая обоснованность такого подхода, еще менее очевидная, чем у квантовомеханического описания биржи, в литературе не обсуждается. В отличие от игр в нормальной форме с точно заданными состояниями и вероятностными смешанными стратегиями, в квантовых играх разрешены смешанные состояния вида

$$\Psi = \sum c_i \psi_i,$$

где состояниям системы и стратегиям игроков отвечают комплексные «волновые функции» $\{\psi_i\}$ с положительными весами $\{c_i\}$ ($0 \le c_i \le 1$, $\sum c_i = 1$). Таким образом, стратегии игроков могут быть суперпозицией «квантовых» базисных состояний.

В одной из первых работ этого направления [8] был предложен наглядный пример повторяющейся игры в орлянку, где два игрока в каждом из N раундов вслепую переворачивают либо не переворачивают монету: выигрывает получивший «орла» в последнем раунде. Если «классический» игрок мог только переворачивать монету, то «квантовый» игрок также мог конструировать суперпозиции состояний ψ_1 («орел») и ψ_2 («решка»):

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_1) \tag{6}$$

Для выигрыша квантовому игроку достаточно перевести монету в состояние (6), поскольку оба хода классического игрока оставляют ее в том же положении, и на последнем шаге перевести в «орла» $\Psi \rightarrow \psi_1$. Но это явно нечестная игра, так как правила для игроков различны: у квантового игрока континуум ходов. С конца 1990-х годов разрабатываются модификации стандартных игр, где «классические» стратегии являются частным случаем «квантовых».

Еще одна характеристика квантовых игр – «запутанность» стратегий игроков (см. п. 1.2). Стратегии представляются как измерения параметра квантовой системы, где количество информации, в отличие от классических единиц *бит* ($|0\rangle$ или $|1\rangle$), выражается в «квантовых битах», или *кубитах* (англ. *qubit*). Так, суперпозицию состояний (6) можно представить кубитом $c_1|0\rangle + c_2|1\rangle$ ($c_1 = c_1 = 1/\sqrt{2}$). Ходам двух «классических» игроков с бинарными стратегиями отвечают четыре варианта {00, 01, 10, 11}, но для двух кубитов также возможна комбинация

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle),$$

которую нельзя разложить на два изолированных кубита. «Степень запутанности» состояний, вопреки квантовой механике, выражают непрерывным параметром (например, $0 \le \alpha \le 1$), хотя физические квантовые системы могут быть или связанными ($\alpha=1$) или несвязанными ($\alpha=0$). Измерению квантового параметра ($P=\psi \cdot \psi^*$) соответствует перевод комплексных чисел в положительные значения вероятностей для компонентов смешанных стратегий, или «редукция волнового пакета» (см. 1.2).

В *квантовой дилемме заключенного* агенты I и II выбирают смешанные стратегии вида (6), где состояние $|0\rangle$ – предательство сообщника, а $|1\rangle$ – сотрудничество с ним. Классическая дилемма заключенного – игра с ненулевой суммой и платежной матрицей

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{I} & \mathrm{II} \\ \mathrm{I} & r,r & s,t \\ \mathrm{II} & t,s & m,m \end{array}$$

с условием на ее элементы $t > r > m > s$. В этой игре имеется равновесие Нэша в чистых стратегиях $|00\rangle$ «предавать» [9]. В случае «квантовых» смешанных стратегий вероятности исходов вычисляются как квадраты комплексных «волновых функций» $\psi|ij\rangle$, где $i,j \in [0,1]$. Вид функций определяется степенью «запутанности» (т.е. взаимной обусловленности) кубитов. Непрерывному множеству этих функций, в зависимости от числового «параметра запутанности» $0<\gamma<\pi/2$, отвечает множество стратегий от независимых ($\gamma=0$) до полностью коррелированных ($\gamma=\pi/2$). Решением игры с независимыми стратегиями является классическое равновесие Нэша (m,m). При полной корреляции стратегий в квантовой игре равновесие Нэша (r,r) совпадает с оптимумом Парето. В промежуточных точках равновесию (q,q) отвечают выигрыши $m<q<r$ [10].

С физической точки зрения запутанность волновых функций не является самостоятельным явлением: функциям конечных состояний в «парадоксе ЭПР» соответствует сохранение спина в системе двух частиц: $s_1=-s_2$. Поскольку сохранение может быть только точным, «коэффициент запутанности» в физической системе принимает лишь два значения – например, $\alpha=1$ (параметр сохраняется) или $\alpha=0$ (параметр не сохраняется). «Частично запутанные» системы выходят за пределы физики и в этом смысле не являются квантовомеханическими, но для них возможны комплексные смешанные стратегии, отсутствующие в классических играх. Для полной «квантовой корреляции» стратегий в дилемме заключенного нетрудно найти житейский аналог: если сообщники держат в банке крупную сумму, которую могут получить только вместе, у них не возникнет и мысли о предательстве, т.е. реализуется оптимум Парето. Но такая корреляция, изменяя платежную матрицу ($r>t$), соответствует другой игре.

Таким образом, «квантование» игр равнозначно изменению правил и поиску смешанных стратегий в модифицированных играх с использованием комплексных функций для вычисления вероятностей. Несмотря на отсутствие физического обоснования, формализм квантовых игр быстро развивается; исследуются его возможные приложения к задачам экономики и динамике биржи [11].

2.3 Квантовая когнитивистика

Возможные аналогии социальных явлений с квантовомеханическими закономерностями обсуждались основателями квантовой теории с 1930-х годов [4]. В этих дискуссиях была высказана гипотеза о «квантовом» характере человеческого восприятия, обусловленном микроскопическим масштабом передачи электрического сигнала в соединениях нервных волокон (синапсах). Квантовые эффекты в процессах переноса зарядов предположительно влияют на особенности сознания и мышления, они индуцируются в психологию, а через нее – на все уровни человеческого поведения: в экономику, социологию, политику и т.д.

Физическая обоснованность современных моделей «квантовой когнитивистики» не обсуждается. В этом направлении на качественном уровне рассматриваются аналогии амбивалентного человеческого поведения с такими аспектами квантовой теории (иногда превратно истолкованными), как принцип неопределенности, «принцип дополнительности» (прямо ошибочный, см. выше) и интерференция при рассеянии квантовых частиц. При анализе иллюзий восприятия, исследуемых психологами, альтернативные интерпретации воспринимаемого объекта (рис. 2) предлагается задавать волновыми функциями вида (6), а выбор испытуемым определенной интерпретации характеризуется как «коллапс волновой функции» (см. 1.2). Эксперименты поведенческой экономики [1], показавшие отклонения частотностей выбора испытуемых в условиях неопределенности от формулы Байеса

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2), \qquad (7)$$

(где $P(B|A_1)$ и $P(B|A_1)$ – условные вероятности выбора, соответственно, «В при условии A_1» и «В при условии A_2», а $P(B)$, $P(A_1)$ и $P(A_2)$ – полные вероятности выбора В и сопровождающих его событий A_1 и A_2) интерпретируются как случайное «выпадение» одной из нескольких комплексных амплитуд вероятностей. Отклонения испытуемых от рационального выбора и зависимость их решений от условий эксперимента (т.е. ограниченную рациональность) объясняют интерференцией амплитуд вероятностей, подобной интерференции при рассеянии потока квантовых частиц [12].

Следует отметить, что в указанных экспериментах не были обнаружены дискретные выбросы результатов либо аналоги интерференционных «биений» при непрерывном изменении параметров – т.е. собственно квантовоподобные эффекты – а лишь установлены статистически значимые отклонения от «классических» вероятностей испытаний (7). В отличие от «квантовых» моделей биржи, в «квантовой когнитивистике», при немалом числе работ за два последних десятилетия, не предложены методы количественных расчетов. Помимо этого, зависимость выбора от контекста, взаимное влияние воспринимаемых образов и другие психологические эффекты могут объяснятся и без привлечения квантовой механики макроскопической интерференцией электрических колебаний и волн в человеческом мозге. Такие явления, как электрофизические ритмы мозга и вызванные потенциалы (event-related potentials), регистрируются методом электроэнцефалографии [13]; их связь с процессами в сознании до настоящего времени не установлена. Тем не менее, квантовоподобное описание человеческого восприятия и попытки его применить в задачах экономики, финансов и общественных наук [12] остаются популярным направлением междисциплинарной физики.

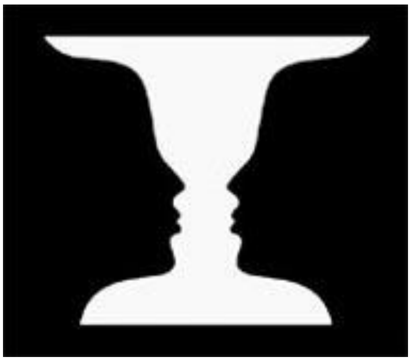


Рис. 2. Квантовоподобная интерпретация оптических иллюзий: (а) белый контур – ваза (ψ_1), черные профили – поцелуй (ψ_2) (см. [12])

Заключение

Краткий обзор работ, посвященных использованию аппарата квантовой механики при моделировании процессов в обществе, экономике и финансах показывает имитационный, или «квантовоподобный», характер предлагаемых в них моделей. В отличие от дискуссий физиков в первой половине XX века об аналогиях квантовых эффектов и общественных явлений, физическое обоснование моделей современными авторами обычно не обсуждается. Для большинства таких моделей это обоснование невозможно не только в силу макроскопического масштаба моделируемых явлений, но и ввиду отказа от ряда фундаментальных положений квантовой механики. Примерами могут служить нефизические аналоги уравнения Шредингера и волновых функций (комплексные собственные значения гамильтониана, мнимое время и др.) в «квантовом» моделировании биржи, искусственные формальные конструкции (непрерывный «параметр запутанности») в квантовых играх, игнорирование реалистических альтернативных объяснений (физическая интерференция электрических колебаний в коре головного мозга) в «квантовой когнитивистике». Таким образом, «квантовые» явления в динамике социальных систем в настоящее время остаются метафорой.

Вместе с тем успехи квази-квантовых расчетных моделей биржи и активное развитие квантовой теории игр показывают перспективы нового направления. Существенно, что преимущества квантовоподобного аппарата (прежде всего гибкость благодаря нестандартному использованию комплексных функций) не расширяют огромного списка успешный приложений квантовой механики: они возникают благодаря отказу от ее некоторых основных принципов. Вопрос о «физическом смысле» таких моделей на сегодня остается открытым.

Не вполне подтверждена даже переносимость основных физических представлений (включая квантование и волновые функции) на «растущие» диссипативные социальные системы и нестационарные случайные процессы в них. Тем не менее, успехи математического моделирования в экономических и общественных науках заставляют искать в таких моделях специфические преломления законов физики – хотя подобная гипотезы до сих пор не имеет фундаментального обоснования. Адекватное математическое описание социума – в том числе формальными методами квантовой физики – также остается нерешенным вопросом.

Литература

1. *Канеман Д.,* Карты ограниченной рациональности: психология для поведенческой экономики. // Психологический журнал, 2006. Т. 27, №2. – С. 5-28.
2. *Ширяев В.И.* Финансовые рынки: нейронные сети, хаос и нелинейная динамика, 5-е изд., – М.: ЛИБРОКОМ, 2013. 232 с.
3. *Heunen C., Sadrzade M., Grefenstette E.* Quantum physics and linguistics: a compositional, diagrammatic discourse. Oxford University Press. 2013.
4. *Mantegna R.N.* Presentation of the English translation of Ettore Majorana's paper: The value of statistical laws in physics and social sciences. // Quant. Finance, Vol. 5. 2005. – P.133-140.
5. *Ahn K, et al.,* Modeling stock return distribution with a quantum harmonic oscillator. // Eur. Phys. Letters, Vol. 120. 2017, 38003.
6. *Baaqi B.* Quantum Finance: Path Integrals and Hamiltonians for Options and Interest rates, Cambridge University Press, 2004. 320 p.
7. *Arioli G., Valente G.* What is really quantum in quantum econophysics? // Philosophy of Science, Vol. 88, N 4. 2021. – P.665-685.
8. *Meyer D.A.* Quantum strategies. // Phys. Rev. Lett, Vol. 82. 1999. – P.1052-1055.
9. *Колокольцов В.Н., Малафеев О.А.* Математическое моделирование многоагентных систем конкуренции и кооперации (Теория игр для всех), – СПб: Лань, 2012. 624 с.
10. *Eisert J., Wilkens M., Lewenstein M.* Quantum games and quantum strategies. // Phys. Rev. Lett. Vol. 83. 1999. – P.3077-3080.
11. *Piotrowski E.W., Sladkowski J.* Quantum market games. // Physica A, Vol. 312. 2002. – P.208-216.
12. *Khrennikov A.* Ubiquitous quantum structure: from psychology to finance. Springer, 2010. 229 p.
13. *Александров Ю.И.* (ред.), Основы психофизиологии. Учебник. – М.: Инфра-М, 1997. 349 с.