DOI: 10.25728/mlsd.2022.0251

МОДЕЛЬ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В ИГРЕ С ПРИРОДОЙ В УСЛОВИЯХ ВЕРОЯТНОСТНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Горелик В.А.
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,
Россия, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44, кор. 2
gorelik@ccas. ru
Золотова Т.В.
Финансовый университет при Правительстве РФ,
Россия, г. Москва, Ленинградский пр., д. 49
tgold11@mail. ru

Аннотация: Рассматривается игра с природой с известными вероятностями состояний. Учитывается возможность корреляционной зависимости случайных значений выигрышей. Принцип оптимальности состоит в минимизации дисперсии как оценки риска при ограничении снизу на математическое ожидание выигрыши. Полученное аналитическое решение задачи протестировано на практическом примере.

Ключевые слова: управление риском, принцип оптимальности, двухкритериальный подход, математическое ожидание, среднеквадратическое отклонение.

Введение

Процессы управления в сложных системах характеризуются неполнотой информации о состоянии системы и внешней среды [1]. В качестве математической модели принятия решений в подобных ситуациях может использоваться игра с природой. При построении модели и постановке оптимизационной задачи возникает вопрос о наличии информации о состояниях природы, имеющейся у лица принимающего решение (ЛПР). От этого зависит определение понятия оптимальности решения или, как иногда говорят, принципа оптимальности. В данной работе предполагается, что у ЛПР имеется информация о вероятностях состояний природы, т.е. рассматривается случай вероятностной неопределенности (или, как модно говорить, речь идет об управлении риском).

Применению математических методов при принятии решений с учетом риска посвящено большое количество работ (см., например, [2–8]). В статье [5] был предложен двухкритериальный подход «эффективность – риск» к определению принципа оптимальности при принятии решений в стохастических условиях. В качестве оценки эффективности использовалось математическое ожидание выигрыша, а в качестве оценки риска – функция VAR. В данной работе мы используем среднеквадратическое отклонение (СКО) и дисперсию. Как известно, функция VAR и дисперсия являются наиболее широко используемыми величинами в качестве оценки риска (см., например, [9–11]).

В статье [6] излагался двухкритериальный подход «эффективность – риск» к определению принципа оптимальности при принятии решений в стохастических условиях с использованием в качестве оценки эффективности математического ожидание выигрыша и в качестве оценки риска – среднеквадратического отклонение (СКО). Заметим, что если при известных состояниях природы речь идет о максимизации математического ожидания выигрыша, то использование смешанной стратегии не имеет смысла. Иначе обстоит дело при двухкритериальном подходе, а именно, оптимальная смешанная стратегия, вообще говоря, дает больший выигрыш, чем любая чистая стратегия.

Главным отличием работы [6] от традиционного подхода к определению смешанной стратегии в теории игр явилось то, что в ней учитывалась возможность корреляционной зависимости случайных значений выигрышей исходных альтернатив (чистых стратегий). Отметим, что учет коррелированности становится существенным именно при двухкритериальном подходе. Обычно в играх с природой в качестве критерия рассматривается либо математическое ожидание выигрыша, либо риск по Сэвиджу. В таком случае возможная коррелированность случайных выигрышей при разных чистых стратегиях никакой роли не играет. При наличии двух критериев, в качестве одного из которых выступает СКО, учет коррелированности существенным образом влияет на постановку задачи и метод ее решения.

Данная работа является продолжением указанного подхода. В [6] двухкритериальная задача формализовалась путем перевода критерия риска СКО (или дисперсии) в ограничение с заданным верхним порогом. Здесь мы рассмотрим задачу минимизации дисперсии как критерия риска при ограничении снизу на математическое ожидание выигрыша. Соответственно будут получены новые аналитические и алгоритмические результаты, касающиеся решения данной задачи в случае учета коррелированности случайных выигрышей каждой пары чистых стратегий.

Итак, рассматривается ситуация, когда ЛПР может выбирать одну из стратегий (альтернатив) $i = 1, \dots, n$, при известном наборе возможных вариантов состояний внешней среды (природы) $j = 1, \dots, m$. Выигрыш от i-го решения при j-м состоянии внешней среды есть a_{ij}. Матрица выигрышей от реализации возможных решений есть $A = \|a_{ij}\|$. Вероятности состояний природы q_j будем считать известными. ЛПР необходимо выбрать ту стратегию, которая приведет, по возможности, к большему выигрышу, но при этом возможные потери вследствие неоднозначности исхода из-за неполноты информации будут как можно меньше.

Конкретно рассматривается одна из возможных постановок двухкритериальной задачи принятия решений в условиях риска, а именно, минимизируется дисперсия как оценка риска, а математическое ожидание выигрыша как оценка эффективности переводится в ограничение. В результате получается задача квадратичного программирования, для решения которой получен аналитический метод. Указанный подход проиллюстрирован на примере процесса инвестирования с использованием реальных статистических данных.

1 Задача минимизации дисперсии при ограничении по эффективности

Итак, в качестве оценки эффективности чистой стратегии i примем математическое ожидание выигрыша $\bar{a}_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j$, а в качестве оценки риска – СКО $\sigma_i = \left(\sum_{j=1}^{m} \left(a_{ij} - \bar{a}_i\right)^2 q_j\right)^{0.5}$.

При использовании смешанной стратегии $\bar{a}_i$ есть условное математическое ожидание выигрыша при реализации i-й чистой стратегии. Обозначим через p_i вероятность выбора i-й чистой стратегии. Тогда математическое ожидание выигрыша при использовании стратегии $p = (p_1, \dots, p_n)$ есть $\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i p_i$.

Пусть σ_{ik} – ковариационные моменты случайных величин выигрышей для чистых стратегий i и k, которые определяются по формулам $\sigma_{ik} = \sum_{j=1}^{m} \left(a_{ij} - \bar{a}_i\right)\left(a_{kj} - \bar{a}_k\right) q_j$. Обозначим ковариационную матрицу $D = \|\sigma_{ik}\|$. Как известно, ковариационная матрица всегда неотрицательно определена. Мы в дальнейшем будем предполагать несколько большее, а именно, что она положительно определена.

СКО случайной величины выигрыша при использовании стратегии $p = (p_1, \dots, p_n)$ в случае наличия коррелированности определяется, очевидно, по формуле $\sigma = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}\, p_i p_k\right)^{0.5}$ или в матрично-векторной форме $\sigma = \langle p, Dp \rangle^{0.5}$, где $\langle \cdot,\cdot \rangle$ – знак скалярного произведения векторов.

Удобно все данные представить в виде таблицы 1.

Таблица 1. Данные модели

	q_1	q_2	$\cdots$	q_m	$\bar{a}_i$	1	2	$\cdots$	n
1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1m}	$\bar{a}_1$	σ_{11}	σ_{12}	$\cdots$	σ_{1n}
2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2m}	$\bar{a}_2$	σ_{21}	σ_{22}	$\cdots$	σ_{2n}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
n	a_{n1}	a_{n2}	$\cdots$	a_{nm}	$\bar{a}_n$	σ_{n1}	σ_{n2}	$\cdots$	σ_{nn}

Первые m столбцов таблицы – это исходные данные, импортируемые из внешних источников, а последние $n + 1$ столбец – расчетные данные.

Введем n-мерные вектора $\bar{a} = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$ и $e = (1, \dots, 1)$.

Сформулируем задачу на минимум дисперсии при ограничении снизу на математическое ожидание выигрыша. Она имеет вид

$$\min_{p \in P} \langle p, Dp \rangle, \quad P = \{p \mid \langle \bar{a}, p \rangle \geq a_0,\ \langle p, e \rangle = 1,\ p \geq 0\}. \tag{1}$$

Множество P не пусто, замкнуто, ограничено, если пороговое значение a_0 не больше максимального из значений $\bar{a}_i$. Значит, при $a_0 \leq \max_{i=1,\dots,n} \bar{a}_i$ задача (1) имеет решение.

Найдем левую границу a^* диапазона значений a_0, при которых первое ограничение в задаче (1) становится существенным. Для этого рассмотрим вспомогательную задачу квадратичного программирования:

$$d_0 = \min_{p \in P_0} \langle p, Dp \rangle, \quad P_0 = \{p \mid \langle p, e \rangle = 1,\ p \geq 0\}. \tag{2}$$

Задача (2) имеет единственное решение p^*. Очевидно, что $a^* = \langle \bar{a}, p^* \rangle$. Обозначим через $\widehat{D}$ произвольную квадратную подматрицу матрицы D размерности $k \times k$, полученную вычеркиванием строк и столбцов с одинаковыми номерами, через I_1 – множество не вычеркнутых номеров строк и столбцов, через I_2 – множество вычеркнутых номеров строк и столбцов, через $\widehat{D}^+$ – дополнительную подматрицу, полученную из D вычеркиванием строк с номерами из I_1 и столбцов с номерами из I_2, через $\hat{e}$ – часть вектора e размерности k, через $\hat{e}^+$ – часть вектора e размерности $n-k$, через $\hat{a}$ – часть вектора $\bar{a}$ с компонентами из I_1. Следующая лемма дает формулу для нахождения a^*.

Лемма. Существует единственная матрица $\widehat{D}$ такая, что $\widehat{D}^+\hat{p} - \langle\widehat{D}^{-1}\hat{e},\hat{e}\rangle^{-1}\hat{e}^+ \geq 0$, где

$$\hat{p} = \langle\widehat{D}^{-1}\hat{e},\hat{e}\rangle^{-1}\widehat{D}^{-1}\hat{e}. \tag{3}$$

При этом

$$a^* = \langle\widehat{D}^{-1}\hat{e},\hat{e}\rangle^{-1}\langle\hat{a},\widehat{D}^{-1}\hat{e}\rangle. \tag{4}$$

Доказательство. Составим функцию Лагранжа $L_0(p,\mu) = \frac{1}{2}\langle p, Dp\rangle + \mu(1-\langle p,e\rangle)$. Условия экстремума Каруша-Куна-Таккера (ККТ) для задачи квадратичного программирования (2) имеют вид $\frac{\partial L_0(p,\mu)}{\partial p_i} = 0, i \in I, \frac{\partial L_0(p,\mu)}{\partial p_i} \geq 0, i \notin I$, где I – множество индексов, соответствующих ненулевым p_i. Для задачи (2) эти условия являются необходимыми и достаточными, а так как решение задачи (2) p^* единственное, то они выполняются только для данного вектора.

Для ненулевых компонент вектора p^* первая часть условий ККТ дает систему уравнений: $\widehat{D}\hat{p} - \mu\hat{e} = 0$. Квадратные подматрицы положительно определенной матрицы D также являются положительно определенными и, следовательно, невырожденными. Поэтому $\hat{p} = \mu\widehat{D}^{-1}\hat{e}$ и из ограничения имеем $\mu\langle\widehat{D}^{-1}\hat{e},\hat{e}\rangle = 1$. Матрица $\widehat{D}^{-1}$ также положительно определена, поэтому $\mu = \langle\widehat{D}^{-1}\hat{e},\hat{e}\rangle^{-1}$ и $\hat{p} = \langle\widehat{D}^{-1}\hat{e},\hat{e}\rangle^{-1}\widehat{D}^{-1}\hat{e}$, т.е. получили (3). Вторая часть условий ККТ приводит к неравенству $\widehat{D}^+\hat{p} - \langle\widehat{D}^{-1}\hat{e},\hat{e}\rangle^{-1}\hat{e}^+ \geq 0$.

Умножим вектор (3) на вектор $\hat{a}$:

$$\langle\hat{a},\hat{p}\rangle = \langle\hat{a},\langle\widehat{D}^{-1}\hat{e},\hat{e}\rangle^{-1}\widehat{D}^{-1}\hat{e}\rangle = \langle\widehat{D}^{-1}\hat{e},\hat{e}\rangle^{-1}\langle\hat{a},\widehat{D}^{-1}\hat{e}\rangle.$$

Значит $a^* = \langle\widehat{D}^{-1}\hat{e},\hat{e}\rangle^{-1}\langle\hat{a},\widehat{D}^{-1}\hat{e}\rangle$, т.е. получили (4). Лемма доказана.

В дальнейшем будем считать, что все $\bar{a}_i$ различны. Это чисто техническое предположение нам понадобится для формулировки теоремы о методе решения задачи (1). Оно позволяет исключить тривиальные случаи, когда оптимальным решением является чистая стратегия. Но это предположение является вполне естественным и не нарушает общности рассмотрения.

Следующая теорема обосновывает метод нахождения оптимальных истинно смешанных (содержащих не менее двух ненулевых компонент) стратегий.

Теорема. Если $a^* < a_0 < \max\limits_{i=1,\dots,n} \bar{a}_i$, все $\bar{a}_i$ различны, матрица $D = \|\sigma_{ik}\|$ положительно определена, то задача (1) имеет единственное решение p^0 и истинно смешанная оптимальная стратегия может быть представлена в виде

$$\tilde{p}^0 = \widetilde{D}^{-1}(\lambda^0\tilde{a} + \mu^0\tilde{e}), \tag{5}$$

где

$$\lambda^0 = \frac{\max\{a_0\langle\tilde{e},\widetilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle - \langle\tilde{a},\widetilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle, 0\}}{\langle\tilde{a},\widetilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle\langle\tilde{e},\widetilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle - \langle\tilde{a},\widetilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^2}, \quad \mu^0 = \frac{\langle\tilde{a},\widetilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle - a_0\langle\tilde{a},\widetilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle}{\langle\tilde{a},\widetilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle\langle\tilde{e},\widetilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle - \langle\tilde{a},\widetilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^2}, \tag{6}$$

$\widetilde{D}$ – некоторая (единственная) квадратная подматрица матрицы D, полученная вычеркиванием строк и столбцов с одинаковыми номерами, $\tilde{p}^0$ – вектор из ненулевых компонент вектора p^0, $\tilde{a}$ – вектор из части компонент вектора $\bar{a}$, $\tilde{e}$ – вектор из части компонент вектора e, полученные вычеркиванием компонент с номерами, соответствующим нулевым компонентам вектора p^0.

Доказательство. При $a_0 < \max\limits_{i=1,\dots,n} \bar{a}_i$ множество P не пусто, замкнуто и ограничено, поэтому задача выпуклого программирования (1) имеет решение, причем единственное, т.к. целевая функция строго выпукла. Условия ККТ для нее являются необходимыми и достаточными (в задаче с линейными ограничениями условие регулярности Слейтера не требуется). Функция Лагранжа имеет вид

$$L_1(p,\lambda,\mu) = \tfrac{1}{2}\langle p, Dp\rangle + \lambda(a_0 - \langle\bar{a},p\rangle) + \mu(1-\langle p,e\rangle)\,,\ \lambda \geq 0.$$

Пусть I – множество индексов, соответствующих ненулевым p_i. Условия экстремума ККТ для задачи (1) имеют вид $\frac{\partial L_1(p,\lambda,\mu)}{\partial p_i} = 0, i \in I, \frac{\partial L_1(p,\lambda,\mu)}{\partial p_i} \geq 0, i \notin I$.

Для ненулевых компонент вектора p имеем систему уравнений: $\widetilde{D}\tilde{p} - \lambda\tilde{a} - \mu\tilde{e} = 0$, где $\widetilde{D}$ – квадратная подматрица матрицы D, полученная вычеркиванием строк и столбцов с номерами, соответствующими нулевым компонентам вектора p, $\tilde{p}$ – вектор из ненулевых компонент вектора p, $\tilde{a}$ – вектор из части компонент вектора $\bar{a}$, $\tilde{e}$ – вектор из части компонент вектора e, полученные вычеркиванием компонент с номерами, соответствующим нулевым компонентам вектора p.

Предположим сначала, что $\lambda > 0$, тогда первое ограничение в (1) активное. Как было сказано выше, квадратные подматрицы положительно определенной матрицы D также являются положительно определенными и, следовательно, невырожденными. Поэтому имеем $\tilde{p} = \tilde{D}^{-1}(\lambda\tilde{a} + \mu\tilde{e})$. Подставляем это выражение в ограничения задачи (1):

$$\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}(\lambda\tilde{a} + \mu\tilde{e})\rangle = a_0, \qquad \langle \tilde{D}^{-1}(\lambda\tilde{a} + \mu\tilde{e}), \tilde{e}\rangle = 1.$$

Преобразуем первое равенство к виду

$$\lambda\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle + \mu\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle = a_0.$$

Из второго равенства выразим $\mu = (1 - \lambda\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle)\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^{-1}$ и подставим в первое:

$$\lambda\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle + (1 - \lambda\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle)\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^{-1}\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle = a_0.$$

Таким образом, с учетом того, что матрица $\tilde{D}^{-1}$ симметричная, получаем выражение для λ:

$$\lambda = \frac{a_0 - \langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^{-1}\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle}{\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle - \langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^{-1}\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^2}. \tag{7}$$

или, после преобразования

$$\lambda = \frac{a_0\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle - \langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle}{\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle - \langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^2}. \tag{8}$$

Покажем, что знаменатель в (8) положителен, т.е. имеет место неравенство

$$\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle - \langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^2 > 0. \tag{9}$$

Действительно, так как $\tilde{D}^{-1}$ является положительно определенной матрицей, то существует такая невырожденная матрица B, что $\tilde{D}^{-1} = B^T B$. Подставив это разложение матрицы в левую часть неравенства, имеем

$$\langle \tilde{a}, B^T B\tilde{a}\rangle\langle \tilde{e}, B^T B\tilde{e}\rangle - \langle \tilde{e}, B^T B\tilde{a}\rangle^2 = \langle B\tilde{a}, B\tilde{a}\rangle\langle B\tilde{e}, B\tilde{e}\rangle - \langle B\tilde{e}, B\tilde{a}\rangle^2.$$

Применим неравенство Коши-Буняковского: $\langle x, y\rangle^2 \le \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$, положив $x = B\tilde{a},\ y = B\tilde{e}$. В неравенстве Коши-Буняковского имеет место равенство только в случае коллинеарности векторов x и y. Но вектора $B\tilde{a}$ и $B\tilde{e}$ не могут быть коллинеарными, т.к. в противном случае при умножении их на матрицу B^{-1} вектора $\tilde{a}$ и $\tilde{e}$ оказываются тоже коллинеарными. Это противоречит условию теоремы, т.к. по предположению все $\bar{a}_i$ различны, а все компоненты вектора e равны единицам. Поэтому при наличии не менее двух компонент у этих векторов имеет место (9).

Числитель в (7) неотрицателен, т.к. из леммы (см. формулу (4)) следует, что в противном случае для подматрицы $\tilde{D}$ пороговое значение a_0 меньше математического ожидания выигрыша, соответствующего минимуму дисперсии. Тогда первое ограничение в задаче (1) не может быть активным и $\lambda = 0$, что противоречит предположению $\lambda > 0$.

Подставив λ в выражение для μ имеем

$$\mu = \left(1 - \frac{a_0 - \langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^{-1}\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle}{\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle - \langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^{-1}\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^2}\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle\right)\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle} - \frac{a_0\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle - \langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^{-1}\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^2}{\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle - \langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^2} = \frac{\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle - a_0\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle}{\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle - \langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^2}.$$

Если $\tilde{p} \ge 0$ и выполнена остальная часть условий ККТ, а именно, неотрицательность производных функции Лагранжа по p_i с номерами, соответствующим нулевым компонентам, то вектор $\tilde{p}$, дополненный нулями на соответствующих местах, является решением задачи (1).

Пусть теперь $\lambda = 0$, тогда имеем $\tilde{D}\tilde{p} - \mu\tilde{e} = 0$. Объединяя оба случая, получаем формулы (5) и (6). Теорема доказана.

Замечание: Если формула (5) дает $\lambda < 0$, т.е. числитель $a_0 - \langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^{-1}\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle < 0$, то это означает, что для данной подматрицы $\tilde{D}$ первое ограничение задачи (1) при выбранном a_0 не может быть активным и имеет место случай $\lambda = 0$. Алгоритм нахождения решения задачи (1) включает перебор множеств ненулевых компонент I. Так как для задачи выпуклого программирования (1) условия оптимальности ККТ являются и достаточными, то если появляется удовлетворяющее им решение, то решение найдено и процесс перебора заканчивается.

2 Практическая интерпретация модели на примере инвестиционного менеджмента

Рассмотрим применение полученных результатов на примере процесса инвестирования на фондовом рынке. Обычно смешанная стратегия интерпретируется как вектор долей финансовых инструментов в составе портфеля. Не исключая такую интерпретацию, предложим и несколько иную точку зрения. Инвестор, как правило, формирует портфель не одномоментно, а как последовательный процесс покупки того или иного финансового актива. В таком случае смешанная стратегия может реализовываться в своем имманентном смысле, т.е. покупки осуществляются случайным образом с распределением, определяемым найденным ранее оптимальным решением. Если этот процесс достаточно длительный, то структура портфеля будет приблизительно соответствовать виду смешанной стратегии. В рамках данной модели как игры с природой при применении ее к фондовому рынку короткие продажи недопустимы, т.к. решением являются смешенные стратегии, компоненты которых в принципе не могут быть отрицательными.

Проведем технический анализ и найдем оптимальную стратегию инвестирования, используя реальные данные о котировках акций российских компаний за период с 01.02.2021 по 01.05.2021. Данный период выбран, во-первых, для сравнения с результатом использования модели с ограничением по риску [6], и, во-вторых, более поздний период данных характеризует падение рыночных индексов и связан не столько с экономическими сколько с политическими причинами.

Были выбраны три относительно успешные компании, а именно, ПАО «Банк ВТБ» (VTBR), ПАО «Газпром» (SAGP), ПАО «Сбербанк России» (SBER).

На рис. 1 приведены значения цен закрытия акций всех рассматриваемых компаний за указанный период, экспортированных в файл Excel (данные взяты с сайта Инвестиционной компании «ФИНАМ» [12]). На основании данных о ежедневных ценах закрытия рассчитаны ежедневные значения доходностей компаний, средние значения доходностей, дисперсии, и ковариации за данный период (они также приведены на рис. 1).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		VTBR	GAZP	SBER		VTBR	GAZP	SBER	
2	<DATE>	<CLOSE>	<CLOSE>	<CLOSE>		**доходности акций**			
3	20210201	0,036945	214,66	263,8		0	-0,001118	-0,002464	
4	20210202	0,036945	214,42	263,15		0,0014887	0,01716258	0,00144404	
5	20210203	0,037	218,1	263,53		0,01027027	0,00774874	0,02496869	
6	20210204	0,03738	219,79	270,11		0,0135099	0,01010055	0,00588649	
7	20210205	0,037885	222,01	271,7		0,01055827	0,02698077	0,01288185	
8	20210208	0,038285	228	275,2		-0,0125375	-0,0011842	-0,0226017	
9	20210209	0,037805	227,73	268,98		-0,0115064	-0,0197163	-0,0114507	
10	20210210	0,03737	223,24	265,9		0,00267594	-0,0084662	-0,004513	
60	20210422	0,048	230,93	292,18		0,07	0,00731823	0,00345677	
61	20210423	0,05136	232,62	293,19		-0,0008762	0,0026223	0,00709438	
62	20210426	0,051315	233,23	295,27		-0,0003897	-0,0052738	0,01093914	
63	20210427	0,051295	232	298,5		-0,0188127	0,00413793	-3,35E-05	
64	20210428	0,05033	232,96	298,49		-0,006358	-0,0105168	-0,0046568	
65	20210429	0,05001	230,51	297,1		0,03179364	0,00377424	0,0021205	
66	20210430	0,0516	231,38	297,73					
67									
68					**мат.ожидания**	0,00547919	0,00127111	0,00200325	
69									
70					**ковар.матрица**	0,00033635	0,00010007	9,5222E-05	
71						0,00010007	0,00016271	9,3955E-05	
72						9,5222E-05	9,3955E-05	0,00016446	
73									

Рис. 1. Котировки акций акционерных обществ «Банк ВТБ», «Газпром», «Сбербанк России» и их статистические характеристики

Стратегия 1 – вложение в акции компании «Банк ВТБ», стратегия 2 – вложение в акции компании «Газпром», стратегия 3 – вложение в акции компании «Сбербанк России». Средние значения доходностей при этом равны $\bar{a}_1 = 0.00548$ (0.548%), $\bar{a}_2 = 0.00127$ (0.127%), $\bar{a}_3 = 0.002$ (0.2%), ковариационная матрица имеет вид $D = \begin{pmatrix} 0.00034 & 0.00010 & 0.000095 \\ 0.00010 & 0.00016 & 0.000094 \\ 0.000095 & 0.000094 & 0.00017 \end{pmatrix}$.

Найдем пределы изменения порогового значения, т.е. вычислим левый и правый концы интервала $\langle \widehat{D}^{-1}\hat{e}, \hat{e}\rangle^{-1}\langle \hat{a}, \widehat{D}^{-1}\hat{e}\rangle < a_0 < \max\limits_{i=1,\dots,n} \bar{a}_i$. Решение задачи (2) дает полноразмерный портфель $p = (0.11532, 0.44388, 0.44079)$, поэтому для исходной матрицы D и исходного вектора ожидаемых выигрышей $\bar{a} = (0.00548, 0.00127, 0.002)$ имеем

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 3815.458 & -1597.97754 & -1296.22457 \\ -1597.97754 & 9840.62394 & -4696.6592 \\ -1296.22457 & -4696.6592 & 9514.1783 \end{pmatrix}, \langle e, D^{-1}e\rangle = 7988.5, \langle \bar{a}, D^{-1}e\rangle = 16.60911.$$

Тогда получаем $0.00208 < a_0 < 0.00548$.

Решим задачу (1) при пороговом значении математического ожидания выигрыша $a_0 = 0.003$.

Приведем для наглядности подробную процедуру решения этой задачи с использованием формул (5) и (6).

Возьмем I={1, 2, 3}, т.е. будем использовать исходный вектор ожидаемых выигрышей $\bar{a} = (0.00548, 0.00127, 0.002)$ и исходную ковариационную матрицу D, тогда получаем $\langle \bar{a}, D^{-1}\bar{a} \rangle = 0.093993$. По формулам (6) имеем

$$\lambda = \frac{0.003 \cdot 7988.538 - 16.60911}{0.093993 \cdot 7988.538 - 16.60911^2} = 0.01549, \ \mu = \frac{0.093993 - 0.003 \cdot 16.60911}{0.093993 \cdot 7988.538 - 16.60911^2} = 0.00009.$$

Используя формулу (5), имеем

$$p = \begin{pmatrix} 3815.458 & -1597.97754 & -1296.22457 \\ -1597.97754 & 9840.62394 & -4696.6592 \\ -1296.22457 & -4696.6592 & 9514.1783 \end{pmatrix} \left(0.01549 \begin{pmatrix} 0.00548 \\ 0.00127 \\ 0.002 \end{pmatrix} + 0.00009 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Откуда $p = (0.33775, 0.24212, 0.42013)$.

Решим теперь задачу (1) при пороговом значении математического ожидания выигрыша $a_0 = 0.0045$. Возьмем I={1, 2, 3}, тогда аналогично по формулам (6) имеем

$$\lambda = \frac{0.0045 \cdot 7988.538 - 16.60911}{0.093993 \cdot 7988.538 - 16.60911^2} = 0.04071, \ \mu = \frac{0.093993 - 0.0045 \cdot 16.60911}{0.093993 \cdot 7988.538 - 16.60911^2} = 0.00004.$$

Используя формулу (5), имеем $p = (0.70007, -0.08654, 0.38648)$.

Условие неотрицательности $p \geq 0$ не выполняется, значит, данный вектор p решением не является. Так как при этом p_2 отрицательное, то можно предположить, что оптимальная смешанная стратегия содержит вторую нулевую компоненту.

Поэтому возьмем I={1, 3}, тогда $\tilde{a} = (0.00548, 0.002)$, $\widetilde{D} = \begin{pmatrix} 0.00034 & 0.000095 \\ 0.000095 & 0.00017 \end{pmatrix}$, $\widetilde{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 3555.969551 & -2058.89531 \\ -2058.89531 & 7272.59202 \end{pmatrix}$, $\langle \tilde{a}, \widetilde{D}^{-1}\tilde{a} \rangle = 0.090743$, $\langle \tilde{e}, \widetilde{D}^{-1}\tilde{e} \rangle = 6710.771$, $\langle \tilde{e}, \widetilde{D}^{-1}\tilde{a} \rangle = 18.64708$ и по формулам (6) получаем

$$\lambda = \frac{0.0045 \cdot 6710.771 - 18.64708}{0.090743 \cdot 6710.771 - 18.64708^2} = 0.04422, \quad \mu = \frac{0.090743 - 0.0045 \cdot 18.64708}{0.090743 \cdot 6710.771 - 18.64708^2} = 0.00003.$$

Используя формулу (5), имеем вектор ненулевых компонент

$$\tilde{p} = \begin{pmatrix} 3555.969551 & -2058.89531 \\ -2058.89531 & 7272.59202 \end{pmatrix} \left(0.04422 \begin{pmatrix} 0.00548 \\ 0.002 \end{pmatrix} + 0.00003 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Откуда $\tilde{p} = (0.71830, 0.28170)$.

Проверим выполнение условия ККТ для вычеркнутого номера $i = 2$. Производная функции Лагранжа по p_2 есть

$$\frac{\partial L_1(p,\lambda,\mu)}{\partial p_2} = \sum_{k=1}^{3} \sigma_{2k} p_k - \lambda \bar{a}_2 - \mu.$$

При подстановке вектора $(0.71830, 0, 0.28170)$ и множителей Лагранжа $\lambda = 0.04422$ и $\mu = 0.00003$ она равна

$$\frac{\partial L_1(p,\lambda,\mu)}{\partial p_2} = (0.00010 \cdot 0.71830 + 0.00016 \cdot 0 + 0.000094 \cdot 0.28170) - 0.04422 \cdot 0.00127 + 0.00003.$$

Откуда $\frac{\partial L_1(p,\lambda,\mu)}{\partial p_2} = 0.00002$. Значит все условия ККТ выполнены и оптимальное решение задачи (1) имеет вид $p^0 = (0.71830, 0, 0.28170)$.

Если решить задачу (1) при пороговом значении математического ожидания выигрыша $a_0 = 0.004188$, то получим решение задачи (1) $(0.62840, 0, 0.37161)$, которое, как и следовало ожидать, в точности совпадает с решением задачи на максимум ожидаемой доходности с ограничением по риску из [6].

Заключение

Целью данной работы является развитие нового подхода в теории игр, конкретно в играх с природой, связанного с рассмотрением корреляции случайных выигрышей для каждой пары чистых стратегий. Полученные теоретические результаты, как нам представляется, могут найти приложения в различных задачах принятия решений. Рассмотренный пример фондового инвестирования является иллюстрацией практического применения полученных результатов. При этом заметим, что в общетеоретическом плане речь идет о нахождении оптимальной смешанной стратегии, для которой условие неотрицательности компонент является обязательным (что, кстати, существенно, усложняет поиск решения). Поэтому при применении данного подхода к фондовому инвестированию короткие продажи исключаются. Впрочем, для фондовых рынков ограничения на короткие продажи, вплоть до их полного запрета, не так уж редки.

Литература

1. *Vasilyev S. and Tsvirkun A.* Problems of managing the development of large-scale systems in modern conditions // 10th International Conference Management of Large-Scale System Development, Proceedings, IEEE Conference Publications. 2017. P. 1–5.
2. *Harman R., Prus M.* Computing optimal experimental designs with respect to a compound Bayes risk criterion // Statistics & Probability Letters. 2018. Vol. 137. P. 135–141.
3. *Kuzmics C.* Abraham Wald's complete class theorem and Knightian uncertainty // Games and Economic Behavior. 2017. Vol. 104. P. 666–673.
4. *Radner R.* Decision and Choice: Bounded Rationality // International Encyclopedia of the Social & Behavioral Sciences (Second Edition). 2015. P. 879–885.
5. *Горелик В.А., Золотова Т.В.* Принцип оптимальности «математическое ожидание – VAR» и его применение в задачах фондового инвестирования // Управление развитием крупномасштабных систем: Труды 12 международной конференции. М.: ИПУ РАН, 2019. С. 148–154.
6. *Горелик В.А., Золотова Т.В.* Стохастические принципы оптимальности в играх с природой и их применение в инвестиционном менеджменте // Управление развитием крупномасштабных систем: Труды 14 международной конференции. М.: ИПУ РАН, 2021. С. 227–234.
7. *Жуковский В.И., Кириченко М.М.* Риски и исходы в многокритериальной задаче при неопределенности // Управление риском. 2016. № 2. С. 17–25.
8. *Лабскер Л.Г.* Свойство синтезирования критерия Вальда-Сэвиджа и его экономическое приложение // Экономика и математические методы. 2019. Т. 55. № 4. С. 89–103.
9. *García F., González-Bueno J.A., Oliver J.* Mean-variance investment strategy applied in emerging financial markets: Evidence from the Colombian stock market // Intellectual Economics. 2015. Vol. 9. Issue 1. P. 22–29.
10. *Xu Y., Xiao J., Zhang L.* Global predictive power of the upside and downside variances of the U.S. equity market // Economic Modelling. 2020. Vol. 93. P. 605–619.
11. *Шарп Уильям Ф., Александер Гордон Дж., Бэйли Джефри В.* Инвестиции. М.: ИНФРА-М, 2018. 1028 с.
12. Инвестиционная компания «ФИНАМ». URL: https :// www . finam. ru/ (дата обращения: 03.05.2021).