DOI: 10.25728/mlsd.2022.0258

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Жукова А. А.[1], Чернов А. В.[1,2]

[1]Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук

Россия, г. Москва, ул. Вавилова, д.44, корп. 2,

[2]Московский физико-технический институт

Россия, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9.

sasha.mymail@gmail.com, chernov.av@mipt.ru

Аннотация: В данной работе представлен подход к решению функционального уравнения нелокального типа, возникающий при исследовании стохастической задачи оптимального управления. Этот опыт демонстрирует проблемы и возможные решения при анализе задач оптимального управления с пуассоновской неопределенностью.

Ключевые слова: оптимальное управление, функциональное уравнение, численные методы.

Введение

Задачи оптимального управления в экономическом моделировании часто связаны с описанием неопределенности внешней среды или внутреннего процесса принятия решений. Эта неопределенность обычно описывается либо Винеровским процессом, либо Пуассоновским процессом. Неопределенность в виде Пуассоновского процесса приводит к условиям оптимальности, которые часто включают разностные уравнения, которые трудно исследовать аналитически с использованием асимптотических методов или методов теории возмущений. Выходом является численный анализ, но специфика решаемых уравнений приводит к нелокальным выражениям и специальным методам их решения. В данной статье представлен случай такого нелокального функционального уравнения и подход, который позволяет получить решение.

1 Обзор литературы и связанные методы

Особенностью моделей оптимального управления (ОУ) в экономике является предположение о вогнутости функционала и уравнений, описывающих динамику. Эти предположения обычно гарантируют уникальность решения или некоторые свойства решения. Со стохастическими задачами оптимального управления анализ становится более сложным, включая уравнения в частных производных (УЧП) для Винеровского процесса [1–3] и УЧП с разностями для Пуассоновского процесса [4–6]. Стохастические модели ОС для больших макросистем в прикладных исследованиях проявляются в динамических стохастических моделях общего равновесия.

Основным инструментом для их решения является метод динамического программирования [7,8], но были попытки применить подход множителей Лангранжа [9–12]. Если в детерминированном случае методы давали бы либо функциональное уравнение (динамическое программирование), либо систему ОДУ (метод Лагранжа), то в стохастической постановке оба метода дают выражения, определяющие управление из функциональных уравнений различной сложности. Поэтому в этой области исследований потребность в эффективных численных методах анализа решения стоит достаточно остро. Наш предыдущий опыт в [13] демонстрирует преимущества функционального метода Ньютона, описанного ниже в данной работе, ранее использовавшегося для одномерного случая в [14].

$$x^{k+1} = x^k - F'(x^k)^{-1} F(x^k). \tag{1}$$

Обратите внимание, что метод Ньютона требует хороших начальных условий, а также строгих требований к обратному оператору. Для смягчения этого требования и расширения области сходимости мы планируем использовать его модификации:

- затухающий метод Ньютона;
- Алгоритм Левенберга–Марквардта [15];
- Квазиньютоновский метод [16].

Первую модификацию метода Ньютона можно записать в виде

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k F'(x^k)^{-1} F(x^k). \tag{2}$$

В области несходимости оригинального метода Ньютона шаг адаптивного параметра α_k меньше 1 и может быть рассчитан по правилу Армиджо.

Алгоритм Левенберга-Марквардта можно записать в виде

$$x^{k+1} = x^k - (\alpha_k I + F'(x^k))^{-1} F(x^k). \tag{3}$$

Значение параметра α_k выбирается в соответствии с некоторой эвристикой (или стратегией), позволяющей добиться требования сходимости на каждом шаге метода. Если $\alpha_k = 0$, то выполняется шаг метода Ньютона, а относительно большое значение α_k изменяет метод на вариант градиентного спуска. Отметим, что этот метод работает и в случае некорректного или вырожденного оператора $F'(x^k)$, что может стать решающим преимуществом при использовании метода штрафа для общей задачи.

Третий вариант вместо вычисления обратного оператора использует его аппроксимацию

$$\begin{gathered} x^{k+1} = x^k - H_k F(x^k); \\ H_0 = I; \lim_{k\to\infty} \left\| H_k - F'(x^k)^{-1} \right\| = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Обратная аппроксимация может начинаться с некоторого начального приближения (тождественный оператор в (4) и улучшаться специальным правилом, определяющим модификацию квазиньютоновского метода (в классической теории оптимизации метод Бройдена–Флетчера–Ограниченной памяти). Алгоритм Гольдфарба–Шанно [16] (вариант L-BFGS) широко используется в настоящее время.

Также в нашей модели мы используем штрафной метод, который в общем случае можно записать в следующем виде со штрафной моделью $M(x,t)$:

$$x^{k+1} = \arg\min_x M(x, t^k). \tag{5}$$

Другой подход, который мы планируем использовать, заключается в изменении значения t^k: т.е. не решать задачу для каждого значения t^k, а менять его на каждом шаге метода оптимизации.

2 Модель оптимального управления потреблением и заимствованием

Модель описывает оптимальное управление потреблением и займами в стохастической среде, где оптимальное управление может влиять на состояние только в случайные пуассоновские моменты времени.

Задача ОС — это задача оптимального потребления $C(t) \ge 0$ на конечном интервале времени и заимствования $K(t)$ для максимизации функционала

$$\mathrm{E}\left[\int_0^T U\left(\frac{C(t)}{C_0}\right) e^{-\Delta t} d\eta(t) - W\big(A(T) - L(T)\big)\right] \tag{6}$$

Непогашенный долг $L(t)$ меняется по мере того, как потребитель берет кредит $K(t)$.

$$dL(t) = K(t) d\eta(t), L(0) = L_0. \tag{7}$$

Баланс банковского счета $A(t)$ изменяется по мере того, как агент покупает продукт потребления в количестве $C(t)$ по цене $p_y(t)$, выплачивает проценты по ставке $r_l(t)$ в банк и получает доход от владения предприятием $Z_\pi(t)$.

$$dA(t) = -p_y(t) C(t) d\eta(t) + K(t) d\eta(t) - r_l(t) L(t) dt + Z_\pi(t) dt,\ A(0) = A_0. \tag{8}$$

Функция $\eta(t)$ представляет собой процесс подсчета Пуассона $\eta(t,\omega)$, где ω для краткости опущено. Интенсивность пуассоновского потока событий постоянна и обозначается Λ.

Ограничения: долг $L(t) \ge 0$, платежеспособность потребителя: $A(t) \ge 0$, возможность оплатить долг $A(T) \ge L(T)$. Последнее невозможно с уверенностью гарантировать для пуассоновского процесса. Управляемость процессов $A(t)$ и $L(t)$, так как к моменту времени T с положительной вероятностью транзакция может не состояться. Вместо этого введем штрафную функцию $W(\cdot)$ в виде

$$W(x)=\frac{\left(\min(x,0)\right)^2}{2a^2},\ a\to 0. \tag{9}$$

Функция полезности $U(\cdot)$ является монотонной вогнутой функцией с $U'(0)=\infty$, в частности, предполагается, что $U(x)=ln(x)$. Эта форма функции полезности подразумевает, что норма потребления $C(t)$ положительна в любой момент времени.

Функции $p_y(t), Z_\pi(t), r_l(t)$ известны и являются внешними по отношению к потребителю. Они определяются в результате общего равновесия экономики, где домохозяйства взаимодействуют с фирмами, банками и государством. Неупреждающие случайные процессы $C(t), L(t), A(t), K(t)$ предполагаются непрерывными слева с заданным правым пределом и адаптируются к естественной фильтрации, порожденной пуассоновским потоком $\eta(t)$.

Анализ стохастической модели оптимального управления [13], формулировка достаточных условий оптимальности и уравнений для нахождения решений в форме синтеза (обратной связи). Решение было найдено не для всего пространства состояний из-за сложностей анализа функционального уравнения. Недавно мы разработали подход к ее решению и представляем метод в следующих разделах.

3 Функциональное уравнение для определения оптимального потребления

Основной особенностью задачи оптимального управления на конечном горизонте планирования является возможность существования пограничного слоя в окрестности конечного момента времени. Модель в [13] имеет пограничный слой порядка $1/\Lambda$. Таким образом, в масштабе времени $t=T-\dfrac{\theta}{\Lambda}$ функциональные уравнения, описывающие потребление, должны удовлетворять уравнению [13]

$$\min\left(0,\frac{-\sigma\left(\theta,Y\right)+Y}{a^2}\right)=-\frac{\mathrm{e}^{\theta-\Delta T}}{\sigma\left(\theta,Y\right)}+\int_0^\theta\frac{\mathrm{e}^{x-\Delta T}}{\sigma\left(x,Y-\sigma\left(\theta,Y\right)\right)}dx. \tag{10}$$

После масштабирования это уравнение превращается в

$$\frac{\min\left(0,x-f(t,x)\right)}{a^2}=-\frac{\mathrm{e}^{\theta}}{f\left(\theta,x\right)}+\int_0^\theta\frac{\mathrm{e}^{x}}{f\left(x,x-f\left(\theta,x\right)\right)}dx. \tag{11}$$

Основная вычислительная проблема при решении этого уравнения заключается в негладкой левой части (11). Чтобы решить эту проблему, мы предлагаем использовать гладкую штрафную функцию вида *softplus* [17] или *SmoothReLU*.

$$-\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{kx}+1\right)}{k}+x=-\frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{-kx}\right)}{k}, \tag{12}$$

который мы используем либо в виде левой части (12), либо в виде его правой части, в зависимости от значения x, чтобы избежать вычисления показателей больших чисел.

Таким образом, мы решаем уравнение

$$-\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{k\left(x-f(t,x)\right)}+1\right)}{ka^2}+\frac{x-f(t,x)}{a^2}=-\frac{\mathrm{e}^{t}}{f\left(t,x\right)}+\int_0^t\frac{\mathrm{e}^{x}}{f\left(x,x-f\left(t,x\right)\right)}dx. \tag{13}$$

Интересным вопросом, важным для анализа сходимости численного метода, является выпуклость или вогнутость выражений в этом уравнении. Этот аспект оставлен для дальнейшего исследования.

4 Подход к решению функционального уравнения

Мы представляем (13) как функциональное уравнение

$$g\left(f\right)=0 \tag{14}$$

и предлагаем применить некоторую адаптацию функционального метода Ньютона [13, 18], чтобы найти его численное решение.

Метод предполагает обновление аппроксимации по

$$f_n=f_{n-1}-\mathrm{F}^{-1}\left(f_{n-1}\right)\left[g\left(f_{n-1}\right)\right], \tag{15}$$

где через $\mathrm{F}\left(f_{n-1}\right)$ обозначен оператор, обратный к производной Фреше оператора g. Точнее говоря, производная Фреше имеет вид

$$\mathrm{F}\left(f\right)[h]=-\frac{\left(\mathrm{e}^t+\int\limits_1^t\frac{\mathrm{e}^\tau D_2\left(f\right)\left(\tau,x-f\left(t,x\right)\right)}{f\left(\tau,x-f\left(t,x\right)\right)^2}d\tau\, f\left(t,x\right)^2\right)}{f\left(t,x\right)^2}h\left(t,x\right)-$$
$$-\frac{h\left(t,x\right)}{a^2\left(\mathrm{e}^{kx-kf\left(t,x\right)}+1\right)}+\int\limits_0^t\frac{\mathrm{e}^\tau h\left(\tau,x-f\left(t,x\right)\right)}{f\left(\tau,x-f\left(t,x\right)\right)^2}d\tau. \tag{16}$$

Чтобы иметь возможность взять обратный от этого оператора, мы делаем приближение и опускаем интегральное слагаемое

$$\int\limits_1^t\frac{\mathrm{e}^\tau h\left(\tau,x-f\left(t,x\right)\right)}{f\left(\tau,x-f\left(t,x\right)\right)^2}d\tau. \tag{17}$$

Это неизбежно снижает точность, но, как показывает опыт работы с подобным уравнением [13], эта модификация сохраняет сходимость и невязка $g(f_n)$ становится достаточно малой.

Для вычисления асимптотического приближения для больших отрицательных x, возьмем общий вид ряда f по переменной x

$$f\left(t,x\right)=a_0\left(t\right)+\frac{a_1\left(t\right)}{x}+\frac{a_2\left(t\right)}{x^2}+\frac{a_3\left(t\right)}{x^3}+\frac{a_4\left(t\right)}{x^4}+\frac{a_5\left(t\right)}{x^5}+O\left(t,x^{-6}\right).$$

При подстановке в (13) и разложении в ряд по большим отрицательным x в правой и левой частях коэффициенты при x дают систему интегральных уравнений на $a_i(t)$, а их решение приводит к асимптотическому выражению

$$f\left(t,x\right)=-\frac{a^2}{x}+\frac{a^4\left(t+1\right)}{x^3}-\frac{a^6\left(t+2\right)\left(2t+1\right)}{x^5}. \tag{18}$$

5 Алгоритм расчета

Как мы описали выше, мы используем упрощенный оператор

$$\mathrm{F}_0\left(f\right)[h]=-\left(\frac{\mathrm{e}^t}{f\left(t,x\right)^2}+\int\limits_0^t\frac{\mathrm{e}^\tau D_2\left(f\right)\left(\tau,x-f\left(t,x\right)\right)}{f\left(\tau,x-f\left(t,x\right)\right)^2}d\tau\right)h\left(t,x\right)-\frac{h\left(t,x\right)}{a^2\left(\mathrm{e}^{kx-kf\left(t,x\right)}+1\right)}, \tag{19}$$

и построить итерационную процедуру как

$$f_n=f_{n-1}-\mathrm{F}_0^{-1}\left(f_{n-1}\right)\left[g\left(f_{n-1}\right)\right]. \tag{20}$$

Оператор $\mathrm{F}_0\left(f\right)[h]$ оказывается локальным по отношению к (t,x), и становится возможным взять его обратный как простое деление единицы на коэффициент h в (19).

$$\mathrm{F}_0^{-1}\left(f\right)=\left(-\left(\frac{\mathrm{e}^t}{f\left(t,x\right)^2}+\int\limits_0^t\frac{\mathrm{e}^\tau D_2\left(f\right)\left(\tau,x-f\left(t,x\right)\right)}{f\left(\tau,x-f\left(t,x\right)\right)^2}d\tau\right)-\frac{1}{a^2\left(\mathrm{e}^{kx-kf\left(t,x\right)}+1\right)}\right)^{-1}. \tag{21}$$

Мы предлагаем следующий подход к численному решению уравнения (13). Поскольку процедура (20) включает выражения с $f\left(\tau,x-f\left(t,x\right)\right)$, что делает вычисление нелокальным, перед вычислением $f(t,x)$ процедуре нужны данные о $f\left(\tau,x-f\left(t,x\right)\right)$, $\tau\in[0,t]$ с аргументом $x-f\left(t,x\right)$ слева от x, поскольку $f(t,x)>0$. Следовательно, необходимо граничное условие в левой части диапазона значений x. Мы используем асимптотическую аппроксимацию решения, которую можно найти при больших отрицательных значениях x (18).

Диапазон значений x разбивается на четыре или пять диапазонов.

- диапазон $t = 0..t_{max}$, $x = -100..-80$ с асимптотическими значениями $f(t,x)$ дает матрицу $F_A[1..i_{t\,max}, 1..j_{max,A}]$ значений, вычисленных по асимптотической формуле (18);
- для диапазона $t = 1..t_{max}$, $x = -80..-20$ матрица $F_1[1..i_{t\,max}, 1..j_{max,1}]$ вычисляется с помощью процедуры (20) и значений из матрицы F_A;
- для диапазона $t = 0..t_{max}$, $x = -20..0$ матрица $F_2[1..i_{t\,max}, 1..j_{max,2}]$ вычисляется с использованием процедурных (20) значений из матриц F_A и F_1;
- для диапазона $t = 1..t_{max}$, $x = 1..10$ требуется специальный анализ, так как частное решение аналогичного случая в [13] демонстрирует высокий рост функции f для малых значений x. Поэтому сетка должна быть более мелкой или даже нелинейной, как это было в [13]. Здесь матрица $F_3[1..i_{t\,max}, 1..j_{max,3}]$ вычисляется с использованием процедуры (20) значений из матриц F_A, F_1 и F_2;
- для диапазона $t = 1..t_{max}$, $x = 10..100$ решение ранее не вычислялось из-за нелинейности min в (11). На этот раз со штрафом softplus это возможно с помощью процедуры (20). Полученная матрица F_4 использует данные из матриц F_A, F_1, F_2 и F_3;
- последний этап заключается в объединении вычисленных значений $f(t,x)$ в разных диапазонах в одно численное решение.

6 Численные эксперименты

Простейшая реализация алгоритма основана на аппроксимации интеграла по правилу средней точки и частной производной в (19) по двухточечной формуле. На самом деле производная берется для значений $x - f(t,x)$, которые могут не соответствовать ни одной точке в сетке. Для этого находятся ближайшие верхнее и нижнее значения x и в качестве производной берется разница между f при верхнем и нижнем значении x. Для интегрирования значения $f\left(\tau, x - f(t,x)\right)$ также берутся как аффинная комбинация f в ближайших точках сетки с весами, определяемыми расстоянием до этих точек.

Эксперименты показывают, что производная Фреше (19) может быть существенно большой (порядка 10^8 при малых значениях f, и выход состоит в дополнительном умножении на f выражений $\mathrm{F}_0\left(f\right)[h]$ и $g\left(f\right)[h]$, вычисленных по отдельности. Параметр штрафа a варьируется от 1 до $1/100$, а параметр *softplus* k устанавливается равным 4, но может принимать любое другое положительное значение.

7 Обсуждение и выводы

В данной работе представлен метод, позволяющий анализировать решение задачи оптимального управления в окрестности конца горизонта планирования. Это демонстрирует, во-первых, специфику функциональных уравнений, определяющих оптимальное управление в стохастической модели, нелокальный характер уравнения. Во-вторых, численный метод ее решения требует определенной гладкости выражений в уравнении и некоторых граничных значений решения, которые могут быть получены асимптотическим разложением. В-третьих, из-за нелокального характера уравнения производная Фреше для метода Ньютона может быть очень сложной, и трудно найти ее обратную. Упрощенная версия по-прежнему работает, хотя может повлиять на точность и скорость сходимости. Последний вывод — контроль над ростом градиента из-за сильно нелинейного поведения решения.

Важными вопросами для дальнейших исследований могут быть анализ сходимости предложенного алгоритма на основе возможной выпуклости функционала и изучение поведения решения при ужесточении штрафа как по параметру a, так и по k.

Литература

1. *Gihman I.I., Skorohod A. V.* Controlled Stochastic Processes. Springer New York, 1979. 237 p.
2. *Yong J., Zhou X.Y.* Stochastic Controls: Hamiltonian Systems and HJB Equations // Stochastic Controls. Springer New York, 1999.
3. *Øksendal B.* Stochastic Differential Equations. Springer, Berlin, Heidelberg, 2003. – P. 65–84.
4. *Øksendal B.K., Sulem A.* Applied stochastic control of jump diffusions. Springer, 2007. 257 p.

5. *Sennewald K., Wälde K.* “Itô’s Lemma” and the Bellman equation for Poisson processes: An applied view // J. Econ. Zeitschrift fur Natl. Springer, 2006. Vol. 89, № 1. – P. 1–36.
6. *Tang S., Li X.* Necessary conditions for optimal control of stochastic systems with random jumps // SIAM J. Control Optim. Publ by Soc for Industrial & Applied Mathematics Publ, 1994. Vol. 32, № 5. – P. 1447–1475.
7. *Parra-Alvarez J.C.* A comparison of numerical methods for the solution of continuous-time DSGE models // Macroecon. Dyn. Cambridge University Press, 2018. Vol. 22, № 6. – P. 1555–1583.
8. *Posch O.* Risk premia in general equilibrium // J. Econ. Dyn. Control. North-Holland, 2011. Vol. 35, № 9. – P. 1557–1576.
9. *Rong S.* Theory of stochastic differential equations with jumps and applications : mathematical and analytical techniques with applications to engineering. Springer, 2006. 434 p.
10. *Chow G.C.* The lagrange method of optimization with applications to portfolio and investment decisions // J. Econ. Dyn. Control. North-Holland, 1996. Vol. 20, № 1–3. – P. 1–18.
11. *Chow G. C.* Dynamic Economics : Optimization by the Lagrange Method. Oxford University Press, 1997. 248 p.
12. *Chow G. C.* Optimal control without solving the Bellman equation // J. Econ. Dyn. Control. North-Holland, 1993. Vol. 17, № 4. – P. 621–630.
13. *Zhukova A., Pospelov I.* Numerical Analysis of the Model of Optimal Consumption and Borrowing with Random Time Scale // International Conference on Numerical Computations: Theory and Algorithms. Springer, Cham, 2020. – P. 255–267.
14. *Bezrodnykh S.I., Vlasov V.I.* Analytic-numerial method for computation of interaction of physical fields in semiconductor diode // Mat. Model. 2015. Vol. 27, № 7. – P. 15–24.
15. *Marquardt D.W.* An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters // Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006. Vol. 11, № 2. – P. 431–441.
16. *Liu D.C., Nocedal J.* On the limited memory BFGS method for large scale optimization // Math. Program. 1989 451. Springer, 1989. Vol. 45, № 1. – P. 503–528.
17. *Dugas C.* et al. Incorporating Second-Order Functional Knowledge for Better Option Pricing // Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS 2000). MIT Press, 2000. – P. 451–457.
18. *Безродных С.И., Власов В.И.* Аналитико-численный метод расчета взаимодействия физических полей в полупроводниковом диоде // Математическое моделирование. 2015. Vol. 27, № 7. – P. 15–24.