DOI: 10.25728/mlsd.2022.0312

МОДЕЛЬ ГАЗОВОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ: ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Скиба А.К.
Федеральный исследовательский центр
«Информатика и управление» РАН,
Россия, г. Москва, ул. Вавилова 40
a.k.skiba@mail.ru

Аннотация: Исследуется непрерывная динамическая модель разработки газового месторождения. Ставятся, решаются, исследуются две математические задачи. В прямой задаче осуществляется поиск максимума накопленной прибыли на множестве временных функций определенного типа. В обратной оптимизационной задаче ищутся все величины горизонтов планирования. Задачи подвергаются всестороннему анализу.

Ключевые слова: прямая и обратная оптимизационные задачи, модель газового месторождения, максимизация накопленной прибыли.

Введение

Каждая страна проходит различные стадии своего развития. Не является исключением и наша страна. В настоящее время Россия находится на этапе своего экономического подъема. Значительный народнохозяйственный рост обеспечивается многочисленными факторами. К ним относится наличие в России больших запасов полезных ископаемых. В ряду всех российских полезных ископаемых особое место занимает природный газ [1, 2]. Природный газ является ценным минералом, и он относится к невозобновляемым ресурсам.

Наша страна имеет возможность добывать природный газ в значительных объемах в течение достаточно длительного времени, обеспечивая не только внутренний рынок, но и внешних потребителей, гарантируя им долгосрочные устойчивые объемы поставок этого важного продукта. Однако места добычи и поставок потребителям природного газа находятся на достаточно больших расстояниях, превышающие иногда тысячи километров. В большинстве случаях для доставки газа потребителям используется газопровод, который ограничивает пропускную способность поставляемого продукта. Данное ограничение существенно и его необходимо учитывать при добыче природного газа из залежей [3].

В этой связи возникают математические задачи, которые представляют научный интерес и базируются на соответствующих моделях. Ряд задач уже решен и нашел свое практическое применение, другие задачи ожидают своего анализа. В отделе Математических методов регионального программирования ФИЦ ИУ РАН ведутся исследовательские работы по математическому моделированию эксплуатации нефтяных и газовых месторождений [4-6].

Рассматриваемые модели подвергались различным модификациям и всестороннему изучению. На этих моделях ставились и решались различные оптимизационные задачи. В отделе также изучались динамические модели, которые в дальнейшем применялись для численных расчетов при решении многих практических задач.

Среди всех оптимизационных задач, поставленных и решенных, нам бы хотелось выделить две из них: задача максимизации накопленной добычи для группы газовых месторождений с ограничением на пропускную способность газопровода [3] и задача максимизации длины их общей "полки" [7]. Для их решения применялся принцип максимума Понтрягина в форме Эрроу [8].

Первая из приведенных задач имеет экономическое содержание, как максимизация совокупного дохода для группы газовых месторождений. Можно поставить и другие оптимизационные задачи с экономическим содержанием. К ним относится минимизация затрат и максимизация прибыли.

1 Построение модели, постановка и решение прямой оптимизационной задачи

Исследуется динамическая агрегированная модель эксплуатации газового месторождения с взаимовлияющими скважинами [5-7]. Вводятся следующие обозначения:

- T – горизонт планирования;
- t – текущее время ($0 \le t \le T$);
- $n(t)$ – количество скважин, вводимых в строй в единицу времени;
- n – максимальные возможности по вводу в строй новых скважин ($n > 0$);

- $N(t)$ – действующий фонд добывающих скважин в момент t;
- N^0 – начальный фонд добывающих скважин;
- $Q(t)$ – текущая добыча газа;
- $q(t)$ – средний дебит добывающих скважин в момент t;
- q^0 – начальный средний дебит добывающих скважин;
- $V(t)$ – извлекаемый запас газа, оставшийся в месторождении в момент t;
- V^0 – начальный извлекаемый запас газа;
- δ – коэффициент дисконтирования;
- c – продажная цена природного газа;
- k – стоимость строительства одной скважины.

Между переменными мы устанавливаем зависимости, представленные в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{N}(t) = n(t), \tag{1}$$

$$\dot{q}(t) = -\frac{q^0}{V^0} q(t)N(t) = -\alpha q(t)N(t), \tag{2}$$

$$\dot{V}(t) = -Q(t) = -q(t)N(t) \tag{3}$$

при ограничении

$$0 \leq n(t) \leq n \tag{4}$$

с начальными условиями

$$V^0 > 0, \tag{5}$$

$$q^0 > 0, \tag{6}$$

$$N^0 = 0. \tag{7}$$

В описание дифференциального уравнения (2) мы вводим обозначение:

$$\alpha = \frac{q^0}{V^0}. \tag{8}$$

Следует обратить внимание на разницу в ограничении (4) между функцией $n(t)$ и постоянной величиной n. Такое совпадение сделано для лучшего восприятия приведенных ниже математических выражений.

Дополнительно мы делаем следующие предположения:

- в любой момент t газовое месторождение покрывается равномерной сеткой добывающих скважин;
- бурение скважины и ввод ее в разработку месторождения происходят в один и тот же момент времени;
- управление динамическим процессом эксплуатации месторождения осуществляется за счет ввода новых скважин $n(t)$ с учетом ограничения (4);
- количество скважин, введенных в строй в единицу времени, описывается временной функцией с фиксированным значением параметра $\tau \in [0, T]$:

$$n(t, \tau) = \begin{cases} n \text{ при } t \in [0, \tau], \tau \in [0, T] \\ 0 \text{ при } t \in (\tau, T]. \end{cases} \tag{9}$$

Задача 1. О максимизации накопленной прибыли с учетом коэффициента дисконтирования для одного газового месторождения

Для системы дифференциальных уравнений (1)-(3) *с начальными условиями* (5)-(7) *и фиксированного интервала времени* $[0, T]$ *необходимо найти такой параметр* τ *в описании функции* $\tilde{n}(t, \tau)$ *из* (9), *и соответствующую этой функцию траекторию* $(\tilde{q}(t, \tau), \tilde{N}(t, \tau))$, *которая доставляет максимальное значение функционалу*

$$\int_0^T [cQ\,(t) - kn(t)] \exp[-\,\delta t]\; dt. \tag{10}$$

Обратим внимание на взаимосвязь дифференциальных уравнений (2) и (3). Действительно, фазовые переменные $q(t)$ и $V(t)$ линейно зависят друг от друга при любых допустимых управлениях, т.е. $q(t) = \alpha V(t)$. Поэтому в дальнейшем при исследованиях достаточно ограничиться только двумя фазовыми переменными $q(t)$ и $N(t)$. К управляющим параметрам относится только одна переменная $n(t, \tau)$, имеющая вид временной функции (9).

В описании накопленной прибыли (10) был включен коэффициент дисконтирования δ, позволяющий соизмерять доходы и затраты, производимые в различные моменты времени.

Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 1. *При выполнении ограничения*

$$\frac{cq^0}{\delta}[1-\exp(-\delta T)] > k \tag{11}$$

существует такое единственное строго положительное значение параметра $\tau = \tau^*$, *при котором однозначно определяется временная функция*

$$\tilde{n}(t,\tau^*) = \begin{cases} n \text{ при } t \in [0,\tau^*], \tau^* \in (0,T) \\ 0 \text{ при } t \in (\tau^*, T], \end{cases} \tag{12}$$

фазовые переменные $\tilde{q}(t,\tau^*)$ *и* $\widetilde{N}(t,\tau^*)$ *и функционал* (10) *достигает максимума на множестве всех временных функций* (9). *Параметр* $\tau^* \in (0,T)$ *находится из решения следующего уравнения:*

$$cq^0 e^{-\frac{\alpha n\tau^2}{2}}\{\frac{\delta}{(\alpha n\tau+\delta)^2}[1-e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)}] + \frac{\alpha n\tau}{\alpha n\tau+\delta}(T-\tau)\, e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)}\} = k. \tag{13}$$

Доказательство. Зафиксируем параметр $\tau \in [0,T]$ и выпишем фазовые переменные $q(t,\tau)$ *и* $N(t,\tau)$*:*

$$q(t,\tau) = \begin{cases} q^0 \exp[-\frac{\alpha n t^2}{2}] \text{ при } t \in [0,\tau], \tau \in [0,T] \\ q^0 \exp[\alpha n(\frac{\tau^2}{2} - \tau t)] \text{ при } t \in (\tau, T]; \end{cases} \tag{14}$$

$$N(t,\tau) = \begin{cases} nt \text{ при } t \in [0,\tau], \tau \in [0,T] \\ n\tau \text{ при } t \in (\tau, T]. \end{cases} \tag{15}$$

Обозначим через $I(\tau)$ значение функционала (10). Воспользовавшись соотношениями (1)-(8), (14) и (15), перепишем $I(\tau)$:

$$I(\tau) = \int_0^T [cQ\,(t) - kn(t)]\exp[-\,\delta t]\;dt =$$

$$\int_0^\tau [c\,q(t)nt - kn]\exp[-\,\delta t]\;dt + n\tau\int_\tau^T cq(t)\exp[-\,\delta t]\;dt =$$

$$\int_0^\tau \{c\,q^0\exp[-\frac{\alpha n t^2}{2}]\,nt - kn\}\,exp[-\,\delta t]\;dt + cq^0 n\int_\tau^T \tau\exp\left[\alpha n\tau(\frac{\tau}{2}-t) -\;\delta t\right]\,dt.$$

Функция $I(\tau)$ непрерывна на отрезке $[0,T]$. Значит, она достигает на отрезке своего максимального значения. Существование максимума доказано.

Покажем, что параметр $\tau > 0$. Для этого продифференцируем функцию $I(\tau)$. В результате получаем

$$I'(\tau) = -kn\exp[-\,\delta\tau] + \;cq^0 n\int_\tau^T \frac{\partial}{\partial\tau}\{\tau\exp\left[\alpha n\tau(\frac{\tau}{2}-t) -\;\delta t\right]\}\,dt =$$

$$-kn\exp[-\,\delta\tau] + \;cq^0 n\int_\tau^T \exp\left[\alpha n\tau(\frac{\tau}{2}-t) -\;\delta t\right]\,dt + cq^0 n\int_\tau^T \tau\frac{\partial}{\partial\tau}\{\exp\left[\alpha n\tau(\frac{\tau}{2}-t) -\;\delta t\right]\}\,dt =$$

$$-kn\exp[-\,\delta\tau] + \;cq^0 n\frac{\exp[\alpha n\tau^2/2]}{\alpha n\tau+\delta}\{\exp[-(\alpha n\tau+\delta)\tau] - \exp[-(\alpha n\tau+\delta)T]\} +$$

$$cq^0 n\;\frac{\alpha n\tau}{(\,\delta+\,\alpha n\tau)^2}\;\exp\left[\frac{\alpha n\tau^2}{2}\right]\{[(T-\tau)(\alpha n\tau+\delta\,)+1]\exp[-(\,\alpha n\tau+\delta)T]\;-\exp[-(\,\alpha n\tau+\delta)\tau]\}. \tag{16}$$

Вычислим производную функции $I(\tau)$ в нуле:

$$I'(0) = -kn + \frac{cq^0 n}{\delta}[1-\exp(-\delta T)].$$

С учетом (11) получаем $I'(0) > 0$. Значит, $\tau = \tau^* > 0$.

Для нахождения значения $\tau = \tau^*$ приравняем (16) к нулю и после преобразований получаем

$$-k + cq^0\frac{\exp[\alpha n\tau^2/2]}{\alpha n\tau+\delta}\,\mathrm{e}^{\delta\tau}\{\delta\mathrm{e}^{-(\alpha n\tau+\delta)\tau} - \delta\mathrm{e}^{-(\alpha n\tau+\delta)T} + \alpha n\tau(T-\tau)(\alpha n\tau+\delta\,)\mathrm{e}^{-(\alpha n\tau+\delta)T}\} =$$

$$-\mathrm{k} + \frac{cq^0\delta}{(\alpha n\tau+\delta)^2}e^{-\frac{\alpha n\tau^2}{2}}\{1 - e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)} + \;\alpha n\tau(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)\,e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)}/\,\delta\} = 0.$$

Отсюда получаем равенство (13). Обозначим левую часть равенства (13) через функцию $\varphi(\tau)$. Данная функция непрерывна на отрезке $[0,T]$. Легко проверить, что $\varphi(0) > k$, $\varphi(T) = 0$ и $\varphi(\tau)$ убывает на отрезке $[0,T]$. Уравнение $\varphi(\tau) = k$ имеет единственное решение $\tau = \tau^* > 0$. Следовательно, величина τ^* однозначно единственным образом определяет оптимальное управление. Единственность и теорема 1 доказаны.

3 Постановка и исследование обратной оптимизационной задачи

В предыдущем параграфе мы осуществляли поиск максимума функционала (10) на континуальном множестве временных функций (12) при дополнительном условии (11). Задача свелась к максимизации непрерывной функции, заданной на отрезке. Было доказано, что максимум существует, он единственен, и функция достигает своего максимального значения внутри рассматриваемого отрезка.

Поставленная задача 1 состоит в максимизации накопленной прибыли (10) на отрезке [0, T]. Анализ исходных параметров задачи показывает, что при выборе конкретного числового значения горизонта планирования T наблюдается некоторый произвол. Действительно, иногда трудно аргументировано объяснить, почему мы выбрали это, а не другое значение рассматриваемого параметра. В тоже время числовые значения других выше упомянутых параметров модели имеют более четкую аргументацию. Они определяются исходя из технологических, экономических и других причин, связанных с конкретным месторождением.

В работе [12] исследовалась следующая ситуация. Два газовых месторождения участвуют в конкурсе направо первым начать свою разработку. Поражение в конкурсе приводит к нежелательным последствиям и значительным материальным и финансовым потерям. Основным критерием выбора является минимум себестоимости. При расчете себестоимости учитывается прогнозная добыча газа в течение заданного количества лет T. Данная информация берется для каждого месторождения из проекта разработки. Было показано, что в некоторых случаях при одних значениях горизонта планирования T в конкурсе побеждает первое месторождение, а при других – второе месторождение. Возникает конфликтная ситуация с соответствующими последствиями. Поэтому нам необходимо обратить больше внимания на горизонт планирования T.

Основное решение задачи максимизации прибыли формулируется в виде теоремы 1. Переформулируем теорему 1 следующим образом.

Теорема 1'. *В задаче* 1 *с фиксированным временем* T *оптимальное управление* (12) *и соответствующие фазовые переменные* (14) *и* (15) *однозначно определяются параметром* $\tau = \tau^*$. *Данный параметр существует и принимает при условии* (11) *единственное значение внутри отрезка* $[0, T]$. *Величина параметра* τ^* *определяется из решения уравнения* (13).

Сформулируем обратную задачу.

Задача 2. *Пусть параметр* $\tau \in (0, T)$ *фиксирован и при этом значении* τ *однозначно определяются управление* (12) *и фазовые переменные* (14) *и* (15). *Найти все значения* $T > \tau$, *при которых управление* (12) *будет оптимальным для задачи* 1. *Необходимо также ответить на вопрос о существовании искомых решений.*

Заметим, что любая оптимальная пара (τ, T), где $0 < \tau < T$, однозначно определяет оптимальное управление (12). Дальнейший анализ показывает, что для фиксированного значения τ таких горизонтов планирования T может быть не более двух.

Воспользовавшись равенством (13), фиксируем оптимальный параметр τ и будем искать значение T из решения следующего уравнения:

$$\varphi(T) = \frac{cq^0\delta}{(\alpha n\tau+\delta)^2} e^{-\frac{\alpha n\tau^2}{2}} \{1 - e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)} + \alpha n\tau(\alpha n\tau + \delta)(T-\tau)\, e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)} / \delta\} = k. \quad (17)$$

Введем обозначение и вычислим

$$s = \frac{k(\alpha n\tau+\delta)^2 e^{\frac{\alpha n\tau^2}{2}}}{cq^0\delta}. \quad (18)$$

Введем вспомогательную функцию

$$f(T) = 1 - e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)} + \alpha n\tau(\alpha n\tau + \delta)(T-\tau)\, e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)}/\delta. \quad (19)$$

Исследуем функцию $f(T)$ при условии $T \geq \tau$. Заметим, что от величины τ до значения $T_2 = \tau + \frac{1}{\alpha n\tau}$ рассматриваемая функция возрастает. В точке T_2 она достигает своего максимального значения и далее падает. В этих точках функция принимает следующие значения: $f(\tau) = 0$; $f(T_2) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{\alpha n\tau+\delta}{\alpha n\tau}} + \frac{(\alpha n\tau+\delta)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha n\tau+\delta}{\alpha n\tau}}}{\delta} = 1 + \frac{\alpha n\tau}{\delta}\mathrm{e}^{-1-\frac{\delta}{\alpha n\tau}}$; $f(\infty) = 1$. Такое же последнее значение функция принимает при $T_1 = \tau + \frac{\delta}{\alpha n\tau(\alpha n\tau+\delta)} < T_2$, т. е. $f(T_1) = 1$.

На рис. 1 изображен график вспомогательной функции $f(T)$ при фиксированном значении $\tau > 0$. Схематично на нем выделены 3 области. Если $s > f(T_2)$, то для рассматриваемого значения τ не существует оптимального горизонта планирования T. Это означает, что не существует пары (τ, T), относящиеся к оптимальному управлению.

Если $s = f(T_2)$, то имеется единственный период планирования $T = T_2$, при котором согласно теореме 1 данная пара (τ, T_2) однозначно определяет оптимальное управление.

Если $s \in (f(T_1), f(T_2))$, то имеются два периода планирования T_1' и T_2', при которых согласно теореме 1' пары (τ, T_1') и (τ, T_2') однозначно определяют свое оптимальное управление. При этом $T_1' \in (T_1, T_2)$ и $T_2' \in (T_2, \infty)$.

Если $s \in (0, f(T_1)]$, то существует единственный горизонт планирования $T' \in (\tau, T_1)$, при котором пара (τ, T') однозначно определяет единственное оптимальное управление.

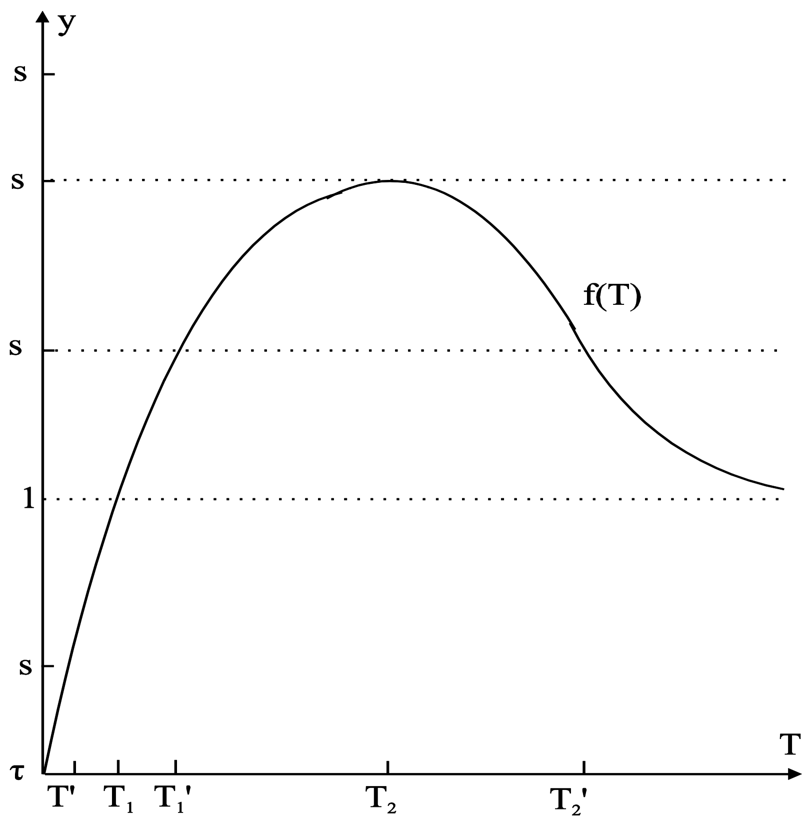

Рис. 1. График вспомогательной функции $f(T)$ при фиксированном значении $\tau > 0$

Таким образом, мы выделили области, в которых лежат оптимальные значения горизонтов планирования T. На рис. 1 в плоскости (T, y) прямая линия $y = f(T_2)$ делит положительный квадрант на две части: одна часть содержит хотя бы одно оптимальное значение T, в другой части оптимальное значение горизонтов планирования T отсутствует. Прямая линия $y = f(T_2)$ является опорной прямой к графику гладкой функции $f(T)$ в точке ее оптимума.

Продолжим исследование оптимальных решений задачи максимизации дисконтированной прибыли. Для этого воспользуемся представлением переменных τ и T в виде уравнения (17):

$$\varphi(T, \tau) = \frac{cq^0}{(\alpha n\tau + \delta)^2} e^{-\frac{\alpha n\tau^2}{2}} \{\delta[1 - e^{-(\alpha n\tau + \delta)(T-\tau)}] + \alpha n\tau(\alpha n\tau + \delta)(T - \tau) e^{-(\alpha n\tau + \delta)(T-\tau)}\} = k. \quad (20)$$

В уравнении связи (20) переменные T и τ расположены «вперемешку». Причем никакими способами невозможно представить зависимую переменную (функцию) τ через независимую переменную T. Таким образом, функцию $\tau = \tau(T)$ нельзя выразить явно. Однако, возникшая сложность не может являться большим препятствием для дальнейшего анализа и эту функцию можно исследовать в таком неявном виде.

В математической теории в наиболее общем виде формулируются достаточные условия однозначной разрешимости уравнения $F(T, \tau) = 0$ в некоторой локальной окрестности рассматриваемой точки T_0. В этой же окрестности решается вопрос о существовании производной $f'(T_0)$ неявно заданной функции $f(T)$.

Данное описание результатов исследований в более детальной и точной математической формулировке лежит в основе теоремы о неявной функции, которая является одной из ключевых теорем математического анализа.

Теорема существования и дифференцируемости неявной функции.

Пусть выполнены условия:

- *функция* $F(T, \tau)$ *и ее частные производные* $F_T'(T, \tau)$ и $F_\tau'(T, \tau)$ *непрерывны в некотором прямоугольнике с центром в точке* (T_0, τ_0);
- *в точке* (T_0, τ_0), *имеет место равенство* $F(T_0, \tau_0)$=0, *в то время как частная производная* $F_\tau'(T_0, \tau_0) \neq 0$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

- *уравнение* $F(T, \tau) = 0$ *определяет единственную непрерывную и дифференцируемую функцию* $\tau = f(T)$, *которая в точке* T_0 *удовлетворяет равенству* $\tau_0 = f(T_0)$;
- *для всех значений* T, *лежащих в некоторой окрестности точки* T_0, *имеет место тождество* $F(T, f(T)) \equiv 0$;
- $f'(T_0) = -\frac{F_T'(T_0,\tau_0)}{F_\tau'(T_0,\tau_0)}$.

Геометрически сформулированная выше теорема означает, что в окрестности точки (T_0, τ_0) гладкая кривая $F(T, \tau) = 0$, представляет собой график непрерывной дифференцируемой функции $\tau = f(T)$.

Следует обратить внимание на важную роль, которую играют в математике теоремы существования и единственности. Многие теоретические и практические задачи начинаются с решения вопроса существования вместе с единственностью. Это отмечается в таких строгих математических дисциплинах, как математический анализ, дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, теория оптимизации и т. д.

Расширим непрерывным образом множество допустимых значений неявно заданной уравнением связи (20) функции с $\tau > 0$ на $\tau \geq 0$. Определим величину T при $\tau = 0$. В данном случае мы можем явно выписать формулу для вычисления T^0:

$$T^0 = -\frac{1}{\delta}\ln\left(1 - \frac{k\delta}{cq^0}\right). \tag{21}$$

Заметим, что при $T > T^0$ экономически оправдано разрабатывать рассматриваемое месторождение оптимальным способом, а при $T \leq T^0$ любая допустимая стратегия разработки газового месторождения приводит к отрицательному значению прибыли, поэтому теряется смысл его разрабатывать.

На рис. 2 представлен график неявной функции, заданный уравнением связи (20) при $\tau \geq 0$ и изображенный на плоскости $T\tau$. На графике выделены три ключевые точки. Они играют важную роль при построении графика и влияющие на его структуру и поведение.

Первая ключевая точка имеет на плоскости координаты $(T^0; 0)$, где T^0 вычисляется по формуле (21). Для определения второй ключевой точки проведем некоторые математические операции. Выделим два отдельных слагаемых в выражении средней части двойного равенства (20):

$$\varphi(T, \tau) = \frac{cq^0\delta}{(\alpha n\tau+\delta)^2} e^{-\frac{\alpha n\tau^2}{2}} + \frac{cq^0}{(\alpha n\tau+\delta)^2} e^{-\frac{\alpha n\tau^2}{2}} [\alpha n\tau(\alpha n\tau + \delta)(T - \tau) - \delta] e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)} = k. \tag{22}$$

Пусть τ_1 является решением следующего уравнения:

$$\frac{cq^0\delta}{(\alpha n\tau+\delta)^2} \mathrm{e}^{-\frac{\alpha n\tau^2}{2}} = k. \tag{23}$$

При условии $\frac{cq^0}{\delta} > k$, уравнение (23) имеет единственное положительное решение, поскольку левая часть уравнения является убывающей функцией от величины τ, и при $\tau \to \infty$ данная функция стремится к нулю. С учетом равенства (23) из (13) следует

$$[\alpha n\tau(\alpha n\tau + \delta)(T - \tau) - \delta] \mathrm{e}^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)} = 0. \tag{24}$$

Из соотношения (24) вытекает два решения: одно решение получается при $T \to \infty$ и не может быть представлено на плоскости в виде отдельной точки; другое решение задается формулой

$$T_1 = \tau_1 + \frac{\delta}{\alpha n\tau_1(\alpha n\tau_1+\delta)}. \tag{25}$$

Вторая ключевая точка имеет на рис. 2 координаты $(T_1; \tau_1)$, где величина T_1 вычисляется по формуле (25), а значение τ_1 определяется из решения уравнения (23).

Производная неявной функции $\tau(T)$, заданной с помощью уравнения связи $\varphi(T,\tau) = k$, вычисляется по формуле:

$$\tau'(T) = -\frac{\varphi'_T(T,\tau)}{\varphi'_\tau(T,\tau)}. \qquad (26)$$

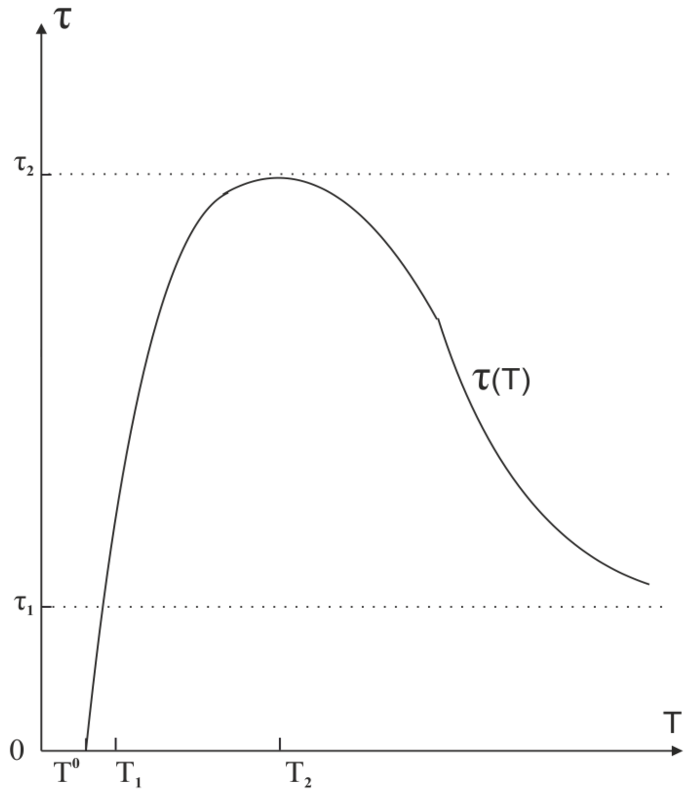

Рис. 2. График неявно заданной функции $\tau(T)$

Вычислим частную производную функции $\varphi(T,\tau)$ по переменной T:

$$\varphi'_T(T,\tau) = cq^0[1 - \alpha n\tau(T-\tau)]e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)-\frac{\alpha n\tau^2}{2}}. \qquad (27)$$

Легко показать, что частная производная $\varphi'_\tau(T,\tau) < 0$ при всех допустимых значениях τ и T.

Воспользовавшись неотрицательными значениями координат первой и второй ключевой точки, покажем положительность производной неявной функции $\tau(T)$ в точках T^0 и T_1. Действительно:

$$\tau'(T^0) = -\frac{\varphi'_T(T^0,0)}{\varphi'_\tau(T^0,0)} = \frac{cq^0}{-\varphi'_\tau(T^0,0)}\, e^{-\delta T^0} > 0; \qquad (28)$$

$$\tau'(T_1) = -\frac{\varphi'_T(T_1,\tau_1)}{\varphi'_\tau(T_1,\tau_1)} = \frac{cq^0\alpha n\tau_1}{-\varphi'_\tau(T_1,\tau_1)(\alpha n\tau_1+\delta)}\, e^{-(\alpha n\tau_1+\delta)(T_1-\tau_1)-\frac{\alpha n\tau_1^2}{2}} > 0. \qquad (29)$$

В третьей ключевой точке производная $\tau'(T_2) = 0$. Воспользовавшись формулами (26) и (27), получим следующее соотношение:

$$T_2 = \tau_2 + \frac{1}{\alpha n\tau_2}. \qquad (30)$$

Подставим полученную зависимость (30) в равенство (20):

$$\varphi(\tau_2) = \frac{cq^0}{(\alpha n\tau_2+\delta)^2}\, e^{-\frac{\alpha n\tau_2^2}{2}}\{\delta + \alpha n\tau_2\, e^{-1-\frac{\delta}{\alpha n\tau_2}}\} = k. \qquad (31)$$

Докажем единственность полученного уравнения при условии выполнения строгого неравенства $\frac{cq^0}{\delta} > k$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(\tau) = \frac{cq^0}{(\alpha n\tau+\delta)^2}\, e^{-\frac{\alpha n\tau^2}{2}}\{\delta + \alpha n\tau\, e^{-1-\frac{\delta}{\alpha n\tau}}\}. \qquad (32)$$

Данная функция обладает следующими свойствами: $\varphi(0) = \frac{cq^0}{\delta} > k$ и $\lim_{\tau\to\infty}\varphi(\tau) = 0$. Докажем, что эта функция убывает. Продифференцируем функцию (32) по аргументу τ:

$$\varphi'(\tau) = \frac{cq^0}{\tau(\alpha n\tau+\delta)^3} e^{-\frac{\alpha n\tau^2}{2}-1-\frac{\delta}{\alpha n\tau}}\{[\delta^2 + 2\alpha\delta n\tau - 2\alpha\delta n\tau e^{1+\frac{\delta}{\alpha n\tau}}] -$$

$$\alpha\delta n\tau(\delta\tau + \alpha n\tau^2)e^{1+\frac{\delta}{\alpha n\tau}} - \alpha^3 n^3\tau^4 - \alpha^2\delta n^2\tau^3 - \alpha^2 n^2\tau^2\}. \quad (33)$$

Если выражение в квадратных скобках правой части равенства (33) принимает отрицательные значения, то функция $\varphi(\tau)$ строго убывает. Для доказательства преобразуем данное выражение:

$$\delta^2 + 2\alpha\delta n\tau - 2\alpha\delta n\tau e^{1+\frac{\delta}{\alpha n\tau}} = \left[\alpha\delta n\tau\left(2 - e^{1+\frac{\delta}{\alpha n\tau}}\right)\right] + [\delta^2 - \delta(\alpha n\tau + \delta)\frac{\alpha n\tau}{\alpha n\tau+\delta} e^{\frac{\alpha n\tau+\delta}{\alpha n\tau}}]. \quad (34)$$

Заметим, что $\alpha\delta n\tau\left(2 - e^{1+\frac{\delta}{\alpha n\tau}}\right) < 0$ и $\frac{\alpha n\tau}{\alpha n\tau+\delta} e^{\frac{\alpha n\tau+\delta}{\alpha n\tau}} \geq 1$. Значит выражение (34) принимает отрицательные значения. Следовательно, уравнение (31) имеет единственное положительное решение и оно равно τ_2.

Числовое значение величины τ_2 мы можем определить, используя широко известный численный метод деления отрезка пополам. Основания для применения этого метода вытекает из основных свойств функции $\varphi(\tau)$ в (32). Таким образом, при $\tau \leq \tau_2$ существует, по крайней мере, одно значение T, при котором прямая задача имеет решение. В противном случае величине τ не соответствует ни одно значение T. Мы получили важное свойство ограниченности множества оптимальных временных функций. Также мы определили точную верхнюю границу этого множества.

Из положительности единственного решения уравнения (31) и существования точки $(T^0; 0)$, удовлетворяющая уравнению связи (21), вытекает, что в точке T_2 неявно заданная функция $\tau(T)$ достигает своего максимального значения. Можно формально подойти к определению локального максимума неявно заданной функции в точке T_2. Для этого достаточно еще раз продифференцировать производную (26) и убедиться, что в точке T_2 вторая производная функции $\tau(T)$ отрицательна.

Из однозначности неявно заданной функции $\tau(T)$ при всех допустимых значениях $T \geq T^0$, единственности локального максимума в точке T_2, выполнения строгих неравенств (28) и (29) в точках T^0 и T_1 вытекает следующее поведение этой функции, график которой изображен на рис. 2. Начиная с точки T^0 до точки T_2 график функции $\tau(T)$, пересекая ось $\tau = \tau_1$, строго возрастает. Далее он достигает в точке T_2 своего максимума и затем строго монотонно убывает, асимптотически стремясь сверху к оси $\tau = \tau_1$ при $T \to \infty$.

Положительный квадрант плоскости, на котором изображен график функции $\tau(T)$, разбит параллельными осями $\tau = \tau_1$ и $\tau = \tau_2$ на три части. Из графика функции $\tau(T)$ видно, что:

- если зависимая переменная $\tau \in (0, \tau_1]$, то имеется взаимно однозначное соответствие между переменными τ и T; в этом случае переменная $T \in (T^0, T_1]$;
- если зависимая переменная $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$, то одной величине τ соответствует два значения T, одно из которых больше T_2, а другое меньше T_2, но больше T_1; в этой области с увеличением величины τ уменьшается разность между двумя соответствующими значениями T;
- если зависимая переменная $\tau = \tau_2$, то данной величине τ соответствует только одно значение T_2; мы наблюдаем вырожденный случай предыдущего пункта; в точке T_2 функция $\tau(T)$ достигает своего максимума;
- если зависимая переменная $\tau > \tau_2$, то данной величине τ не соответствует ни одно значение T.

Из выше сказанного вытекает, что множество всех τ ограничено величиной τ_2, которое определяется из единственного решения уравнения (31). Напомним, что единственность решения уравнения (31) наступает при условии выполнения строгого неравенства $\frac{cq^0}{\delta} > k$. Значение τ_1 определяется из решения уравнения (23). Данное решение единственно.

Далее приведем алгоритм определения всех значений T, соответствующих заранее заданной величине $\tau = \tau^* > 0$. Предполагаем, что исходные данные удовлетворяют строгому неравенству $\frac{cq^0}{\delta} > k$.

Блок 1.

Рассмотрим вспомогательную функцию (19), график которой схематично изображен на рис. 1. Подставим в формулу для описания вспомогательной функции (19) вместо значения τ величину τ^*. В этом случае вспомогательная функция (19) имеет следующий вид:

$$f(T) = 1 - e^{-(\alpha n\tau^*+\delta)(T-\tau^*)} + \alpha n\tau^*(\alpha n\tau^* + \delta)(T - \tau^*)\, e^{-(\alpha n\tau^*+\delta)(T-\tau^*)}/\delta. \quad (35)$$

Вычислим значения вспомогательной функции (35) в точках, величины которых расположены в порядке возрастания $T = \tau^*$, $T = T_1 = \tau^* + \frac{\delta}{\alpha n\tau^*(\alpha n\tau^*+\delta)}$ и $T = T_2 = \tau^* + \frac{1}{\alpha n\tau^*}$:

$$f(\tau^*) = 0; \tag{36}$$

$$f(T_1) = f\left(\tau^* + \frac{\delta}{\alpha n\tau^*(\alpha n\tau^*+\delta)}\right) = 1; \tag{37}$$

$$f(T_2) = f\left(\tau^* + \frac{1}{\alpha n\tau^*}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{\alpha n\tau^*+\delta}{\alpha n\tau^*}} + (\alpha n\tau^* + \delta)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha n\tau^*+\delta}{\alpha n\tau^*}}/\delta.$$

В соответствии с формулой (18) определим положительное числовое значение s при $\tau = \tau^*$:

$$s = \frac{k(\alpha n\tau^*+\delta)^2 e^{\frac{\alpha n\tau^{*2}}{2}}}{cq^0\delta}. \tag{38}$$

Преобразуем равенство (17) при $\tau = \tau^*$. В результате с учетом (38) получаем

$$1 - e^{-(\alpha n\tau^*+\delta)(T-\tau^*)} + \alpha n\tau^*(\alpha n\tau^* + \delta)(T - \tau^*)\, e^{-(\alpha n\tau^*+\delta)(T-\tau^*)}/\delta = s. \tag{39}$$

Подставим (35) в (39), приходим к уравнению с одним неизвестным:

$$f(T) = s. \tag{40}$$

Если выполнено нестрогое неравенство

$$s \leq 1,$$

то переходим к блоку 2. В противном случае переходим к блоку 3.

Блок 2.

В этом случае параметр s удовлетворяет следующему неравенству:

$$0 < s \leq 1.$$

Воспользуемся равенствами (36), (37) и (40). В результате получаем

$$f(\tau^*) < f(T) \leq f(T_1) = f\left(\tau^* + \frac{\delta}{\alpha n\tau^*(\alpha n\tau^*+\delta)}\right). \tag{41}$$

Функция $f(T)$ на отрезке $[\tau^*, T_1]$ является строго возрастающей функцией. Поэтому для численного поиска единственного решения уравнения (41) используем методом деления отрезка пополам.

Конец алгоритма.

Блок 3.

Если выполнено неравенство $s \geq f(T_2)$, то переходим к блоку 4.

В этом случае числовое значение параметра s лежит внутри промежутка от 1 до $f(T_2)$, т.е.

$1 < s < f(T_2)$ или с учетом (40) получаем $1 < f(T) < f(T_2)$. Функция $f(T)$ строго возрастает от T_1 до T_2 и строго убывает при $T > T_2$. Справедливо выполнение верхнего предела $\lim\limits_{T\to\infty} f(T) = 1$. Значит, существует такое значение $T_k > T_2$, при котором выполняется строгое неравенство $s > f(T_k)$. Следовательно, уравнение (40) имеет два корня. Один корень расположен в промежутке от T_1 до T_2, другой корень – от T_2 до T_k. Для получения числовых значений этих корней используем дважды метод деления отрезка пополам.

Конец алгоритма.

Блок 4.

Если выполнено равенство $s = f(T_2)$, то уравнение (40) имеет единственное решение $T = T_2$. В противном случае уравнение (40) не имеет решений.

Конец алгоритма.

Далее мы исследуем поведение точной верхней грани τ_2 множества временных функций в зависимости от величины параметра k. Напомним, параметр k определяет величину стоимости строительства одной скважины. Для этого продифференцируем равенство (31) по параметру k. В результате получаем

$$\tau_2'(\mathrm{k}) = \frac{1}{\varphi'(\tau_2)}.$$

Выше при вычислении производной функции $\varphi(\tau)$ в (33) было показано, что производная отрицательна. Значит, с ростом величины параметра k до величины $\frac{cq^0}{\delta}$ точная верхняя грань τ_2 строго убывает, и она стремится к нулю. С уменьшением величины параметра k до нуля точная верхняя грань τ_2 строго возрастает, и она стремится к бесконечности.

Заключительная часть данного параграфа относится к выявлению максимального значения функционала, определенных на некотором множестве оптимальных стратегий разработки газового месторождения. Пусть T_1' и T_2' обозначают две точки, расположенные строго по порядку, и пусть выполняется равенство

$$\tau = \tau(T_1') = \tau(T_2').$$

Выпишем два функционала и сравним их значения:

$$I_1 = \int_0^\tau [cq\,(t)nt - kn]e^{-\delta t}dt + \int_\tau^{T_1'} cq\,(t)n\tau e^{-\delta t}dt;$$

$$I_2 = \int_0^\tau [cq\,(t)nt - kn]e^{-\delta t}dt + \int_\tau^{T_1'} cq\,(t)\text{n}\tau e^{-\delta t}dt + \int_{T_1'}^{T_2'} cq\,(t)n\tau e^{-\delta t}dt =$$

$$I_1 + \int_{T_1'}^{T_2'} cq\,(t)n\tau e^{-\delta t}dt > I_1.$$

Таким образом, наибольшее значение функционал принимает при большем горизонте планирования.

Другая задача состоит в поиске такой пары (T,τ), которая обеспечивает максимальное значение функционала. С учетом (1)-(3) и (12) переписываем интеграл (10)

$$I(T,\tau) = \int_0^T [cQ\,(t) - kn(t)]e^{-\delta t}dt = \int_0^\tau [cq\,(t)nt - kn]e^{-\delta t}dt + \int_\tau^T cq\,(t)n\tau e^{-\delta t}dt =$$

$$\int_0^\tau [cq^0 e^{-\alpha nt^2/2}\,nt - kn]e^{-\delta t}dt + cq^0 e^{-\alpha n\tau^2/2} n\tau \int_\tau^T e^{-\alpha n\tau(t-\tau)-\delta t}\,dt.$$

Возьмем частную производную функции $I(T,\tau)$ по τ и приравняем ее к нулю. В результате получаем уравнение (20). Уравнение (20) определяет неявно заданную функцию $\tau(T)$. С учетом неявно заданной функции $\tau(T)$ и равенства (20) продифференцируем $I(T,\tau(T))$ по T:

$$I'(T,\tau(T)) = cq^0 e^{-\alpha n\tau^2(T)/2-\alpha n\tau(T)(T-\tau(T))-\delta T} n\tau(T). \qquad (42)$$

Для любого конечного T правая часть равенства (42) положительна и $\lim_{T\to\infty} I'\big(T,\tau(T)\big) = 0$. Максимальное значение функционал принимает при величине T, стремящейся к бесконечности. В этом случае величина τ однозначно определяется из решения уравнения (23).

Заключение

В настоящей статье мы рассмотрели непрерывную динамическую модель газового месторождения. В рамках модели выписан функционал для расчета накопленной прибыли. Известно, что прибыль считается важным экономическим показателем. Она отражает уровень эффективности производственной деятельности на любом разрабатываемом месторождении. Поэтому к ней проявляется особый математический интерес. Поставлена задача максимизации накопленной прибыли на множестве временных функций.

Оптимальное решение прямой поставленной задачи состоит в следующем. Весь горизонт планирования разбивается на две части: на первом этапе месторождение разрабатывается с максимальным постоянным темпом бурения скважин; на втором этапе бурение прекращается. Доказывается, что такое управление единственное.

Другая обратная задача сводится к следующему. Пусть фиксирован временной период этапа бурения скважин. Решается прямая задача на максимум. При каких горизонтах планирования фиксированный временной период этапа бурения является оптимальным? Отвечаем также на вопрос о количестве таких горизонтов планирования. Таких горизонтов планирования может быть один, два или вообще их не быть.

Исследование проводится на двух рисунках. На каждом рисунке строится график. Каждый график подвергается всестороннему анализу. Для исследования используется теорема существования и дифференцируемости неявной функции. Доказывается, что для случая двух горизонтов планирования наибольшее значение функционала достигается с большей величиной. Для фиксированного временного периода этапа бурения приводится алгоритм численного поиска горизонтов планирования.

Доказывается, что при решении прямой задачи с нефиксированным временем наибольшее значение функционал достигает при бесконечном горизонте. В этом случае временной период этапа бурения определяется по соответствующей формуле.

Литература

1. *Вяхирев Р.И., Коротаев Ю.П.* Теория и опыт разработки месторождения природных газов. – М.: ОАО "Газпром", 1999. – 409с.
2. *Закиров С.Н., Лапук Б.Б.* Проектирование и разработка газовых месторождений. – М.: Недра, 1974. – 376с.
3. *Skiba A.K.* Maximization of the Accumulated Extraction in a Gas Fields Model. // In: Evtushenko Y., Jacimovic M., Khachay M., Kochetov Y., Malkova V., Posypkin M. (eds), Int. Conf. on Optimization and Applications (OPTIMA 2018) // Communications in Computer and Information Science, Springer. 2019. Vol. 974. – P.453-469.
4. *Хачатуров В.Р., Соломатин А.Н., Злотов А.В. и др.* Планирование и проектирование освоения нефтегазодобывающих регионов и месторождений: Математические модели, методы, применение. / Под ред. В.Р. Хачатурова. – М.: УРСС:ЛЕНАНД, 2015. – 304с.
5. *Маргулов Р.Д., Хачатуров В.Р., Федосеев А.В.* Системный анализ в перспективном планировании добычи газа. – М.: Недра, 1992. – 288с.
6. *Skiba A.K.* Dynamic model analysis of gas deposit developments. // 2018 Eleventh International Conference Management of Large Scale System Development (MLSD). IEEE Conference Publications, IEEE Xplore Digital Library. – P.619-622.
7. *Скиба А.К.* Поиск в модели газовых месторождений максимальной длины их общей "полки". // Труды МФТИ. 2019. № 2(42). – С.49-61.
8. *Эрроу К.* Применение теории управления к экономическому росту// Матем. экономика. – М.: Мир, 1974. – С.7-45.
9. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. – М.: Наука, 1972. – 576с.
10. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983. – 393с.
11. *Моисеев Н.Н.* Элементы теории оптимальных систем. – М.: Наука, 1975. – 528с.
12. *Скиба А.К., Соломатин А.Н., Хачатуров В.Р.* Себестоимость добычи в модели газового месторождения: исследование и применение // Труды МФТИ. 2018. №3(39). – С.45-53.