DOI: 10.25728/mlsd.2022.0388

МНОГОПРОДУКТОВЫЙ РАССРЕДОТОЧЕННЫЙ РЫНОК В СИСТЕМЕ МИРОВОГО ХОЗЯЙСТВА

Коваленко А. Г.
Самарский государственный университет
alexey.gavrilovich.kovalenko@rambler.ru
Злотов А.В.
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН
Россия, Москва, ул. Вавилова, д. 44
Zlot_a@mail.ru

Аннотация: Строятся математические модели, которые являются развитием модели экономики Вальраса, как централизованной, так и децентрализованной пространственно-рассредоточенной экономической системы с взаимодействиями субъектов совершенной и несовершенной конкуренции. Разработаны численные методов анализа описанных моделей. Численные методы поиска состояния равновесия рассматриваемых моделей строятся на основе методов векторной оптимизации.

Ключевые слова: Модель Эрроу-Дебре, несовершенная и совершенная конкуренция, домашние хозяйства, предприятия, перекупщики, сетевые задачи, теория гидравлических систем, поиск состояний равновесия

Введение

Проблема описания экономической системы и существования ее равновесия была изложена еще в работе Л. Вальраса [1]. Моделям рынков несовершенной конкуренции (анализ рыночной власти и ее регулирование) посвящены работы нобелевских лауреатов Кеннет Джозеф Эрроу совместно с Жераром Дебре [2], Жана Тироля [3]. Однако в построенных моделях отсутствует пространственно-ценовая дифференциация рынков.

Данная статья посвящена следующему этапу развития моделей рассредоточенного рынка. Для анализа этих структур мы предлагаем численные методы оптимизации, численные методы Теории Гидравлических Сетей, теории игр.

1 Описание экономической системы

Модель экономической системы состоит из:

множества домашних хозяйств, основой существования которых является потребление продукции, покупаемых с различных рынков.

множества предприятий, потребляющих:

- труд домашних хозяйств
- товары – ресурсы, выпускаемые другими предприятиями
- ресурсы территории, на которой они находятся;

прибыль предприятий распределяется на оплату труда, оплату приобретаемых ресурсов, оплату по акциям домашних хозяйств-собственников предприятий.

Множества перекупщиков, которые:

- покупают товары у предприятий;
- перепродают между собой, и в конечном итоге, транспортируют товары посредством соответствующей транспортной системы;
- продают товары домашним хозяйствам;

транспортной системы, по которым носители труда несут по свой труд от мест проживания до мест потребления (предприятий), взамен получая оплату за труд.

Для анализа подобных систем в настоящее время широко используются высоко агрегированные макроэкономические модели. В данной статье мы используем развитие моделей микроэкономики [8].

2 Математические модели субъектов экономической системы

2.1 Модели поведения домашних хозяйств на основе функций полезности в структуре экономической системы

Пусть W конечное множество видов товаров экономической системы, w – вид товара $w \in W$. Пусть L конечное множество видов труда экономической системы, l – вид труда. Математические модели домашних хозяйств в микроэкономическом анализе широко известны. [4]. Модели строятся на основе теории бинарных отношений, задаваемых в пространстве векторов потребления с одной стороны и пространстве векторов труда.

Сложнее дело обстоит с моделями труда. Труд – деятельность, направленная, прямо или косвенно, на приобретение товаров потребления. Естественным является деление труда на отдельные виды. Под видом труда будем понимать однородные деятельности, неотличимые друг от друга.

Обозначим через xw вектор товаров потребления, xl вектор выполняемого труда, то каждая компонента вектора $x=(xw,xl)$ имеет свою единицу измерения. Если XW пространство видов предметов потребления, и пространство XL видов труда, то прямое произведение $X=XW\times XL$ этих пространств дает полное пространство, описывающее состояние экономической системы.

Будем считать, что для любого домашнего хозяйства в пространстве X можно определить бинарное отношение строгого порядка «$\succ$» и порядка эквивалентности «$\approx$», устанавливающее предпочтение на нем. На этой основе может быть построена функция полезности $u=u(x)=u(xw,xl)$.

Обозначим $ДХ$ множество домашних хозяйств в экономической системе. Пусть $i\in ДХ$. Считаем, что для любых $x,y\in X$ домашнее хозяйство i :

либо $x\succ_i y$ (читаем «x предпочтительнее y для домашнего хозяйства i),

либо $y\succ_i x$ (читаем «y предпочтительнее x для домашнего хозяйства i),

либо $x\approx_i y$ (читаем «x эквивалентно y» для домашнего хозяйства i).

На основе введенного таким образом порядка, может быть получена функция полезности $u_i=u_i(x)=u_i(xw,xl)$. Обычно для домашнего хозяйства вектор $xw\in XW$ являются благом, а $xl\in XL$ антиблагом.

В дальнейшем, так как каждому $\boldsymbol{i}$ принадлежит свой вектор товаров и свой вектор видов труда, будем применять XW_i и XL_i.

Каждое домашнее хозяйство узла $i\in ДХ$, на суммарный доход приобретает товары потребления и поставляет свой труд на рынки труда. Суммарный доход состоит из:

1) доход $Д_i^1$ от продажи своих видов труда;

2) доход $Д_i^2$ от владения акциями предприятий;

3) доход $Д_i^3$ от владения акций перекупщиков.

Будем считать, что каждое домашнее хозяйство $i\in ДХ$ в результате своей деятельности максимизирует свою полезность. Максимум полезности домашнего хозяйства будет иметь вид

$$u_i=u_i(x)=u_i((xw_v)_{v\in V_W^+(i)};(xl_v)_{v\in V_L^-(i)})\to\max_{\Theta_{ДХ}(i)} \tag{1}$$

где $\Theta_{ДХ}(i)$ - вектор переменных (параметров), по которым проводится оптимизация, в частности,

$$\Theta_{ДХ}(i)=\left((xw_v)_{v\in V_W^+(i)};(xl_v)_{v\in V_L^-(i)}\right) \tag{2}$$

$V_W^+(i)$ – множество дуг, по которым товар поступает с товарных рынков,

$V_L^-(i)$ – множество дуг, по которым труд выходит на рынки труда.

Для $v\in V_W^+(i)$ цена товара, поступающего по дуге v из узла $h1(v)$, равна $P_{h1(v)}$, поэтому затраты на приобретение товаров будет иметь вид $\sum_{v\in V_W^+(i)}P_{h1(v)}\times xv$

Таким образом, бюджетное ограничение будет выглядеть,

$$\sum_{v\in V_W^+(i)}P_{h1(v)}\,xw_v\le Д_i^1+Д_i^2+Д_i^3 \tag{3}$$

2.2 Доход от продажи труда

Первая часть от продажи труда вычисляется по зависимости

$$Д_i^1=\sum_{v\in V_L^-(i)}Pl_{h2(v)}\cdot xl_v \tag{4}$$

где $V_L^-(i)$ – множество дуг, выходящих из узла i в узлы рынков труда $h2(v)$, $v\in V_L^-(i)$;

$P_{h2(v)}$ – цена труда в этих узлах.

2.3 Доход по акциям предприятий

Обозначим через J_i множество предприятий, акционером которого является домашнее хозяйство i, $J_i \subset ПР$. Возьмем предприятие $j \in J_i$, прибыль этого предприятия π_j. Через I_j обозначим множество домашних хозяйств – акционеров предприятия j, между которыми распределяется эта прибыль.

Введем коэффициенты α_j^k – доля прибыли, получаемая домашним хозяйством k от предприятия j. Эти коэффициенты должны обладать свойствами

$$\sum_{k \in I_j} \alpha_j^k = 1, \quad \alpha_j^k \geq 0, \quad k \in I_j \tag{5}$$

Тогда вторая часть бюджета домашнего хозяйства будет равна

$$Д_i^2 = \sum_{j \in J_i} \alpha_j^i \pi_j \tag{6}$$

2.4 Доход по акциям от перекупщиков

Пусть w – некоторый продукт, $w \in W$, u – перекупщик этого товара, обозначим $VV = \bigcup_{w \in W} V_W$ – множество всех перекупщиков. Обозначим через JV_i множество перекупщиков, акционером которого является домашнее хозяйство i. Возьмем перекупщика $jv \in JV_i$, прибыль перекупщика π_{jv}. Через IV_{jv} обозначим множество домашних хозяйств – акционеров перекупщика jv, между которыми распределяется эта прибыль. Введем коэффициенты β_{jv}^k – доля прибыли, получаемая домашним хозяйством k от перекупщика jv. Эти коэффициенты должны обладать свойствами

$$\sum_{k \in IV_{jv}} \beta_{jv}^k = 1 \qquad \beta_{jv}^k \geq 0, \quad k \in IV_{jv}$$

Тогда третья часть бюджета домашнего хозяйства будет равна $Д_i^3 = \sum_{jv \in JV_i} \beta_{jv}^i \pi_{jv}$

2.5 Задача домашнего хозяйства

Для узла i задача домашнего хозяйства $ДХ(i)$ имеет вид

$$u_i = u_i(x) = u_i((xw_v)_{v \in V_W^+(i)}; (xl_v)_{v \in V_L^-(i)}) \to \max_{\Theta_{ДХ}(i)}, \tag{7}$$

при бюджетном ограничении

$$\sum_{v \in V_W^+(i)} P_{h1(v)}\, xw_v \leq \sum_{v \in V_L^-(i)} Pl_{h2(v)} \cdot xl_v + \sum_{j \in J_i} \alpha_j^i \pi_j + \sum_{jv \in JV_i} \beta_{jv}^i \pi_{jv} \tag{8}$$

Так, как мы считаем, что домашние хозяйства непосредственно связаны дугами с узлами локальных рынков экономической системы, потоки по дугам обозначены q_v, начало дуги обозначен $h1(v)$, конец дуги обозначен $h2(v)$, то задача домашнего хозяйства $ДХ(i)$ будет иметь вид

$$\begin{cases} u_i = u_i(x) = u_i((q_v)_{v \in V_W^+(i)}; (q_v)_{v \in V_L^-(i)}) \to \max\limits_{\left((q_v)_{v \in V_W^+(i)};\, (q_v)_{v \in V_L^-(i)}\right)} \\ \sum\limits_{v \in V_W^+(i)} P_{h1(v)}\, q_v \leq \sum\limits_{v \in V_L^-(i)} Pl_{h2(v)} \cdot q_v + \sum\limits_{j \in J_i} \alpha_j^i \pi_j + \sum\limits_{jv \in JV_i} \beta_{jv}^i \pi_{jv} \end{cases}$$

(9)

Для дуги $v \in V_{W(i)}^+$ узел $h1(v)$ принадлежит рынку товара w, для которого $h1(v) \in E^w$.

Для дуги $v \in V_{L(i)}^-$ узел $h2(v)$ принадлежит рынку труда l, для которого узел $h2(v) \in E^l$.

2.6 Модели поведения предприятий на основе функций полезности в структуре экономической системы

Обозначим через $ПР$ множество предприятий экономической системы, которые выпускают товары из множества W. Допускается, что каждое предприятие может выпускать несколько видов товаров.

Пусть $i \in ПР$, $ПР(i)$ – предприятие *i-го* узла. Через $V_W^-(i)$ обозначим множество дуг, по которым предприятие $ПР(i)$ отправляет произведенный товар на соответствующие рынки. Для любой дуги $v \in V_W^-(i)$ начало $h1(v) = i$. Конец дуги $j = h2(v)$ принадлежит множеству E_w рынка R_w товара w, $w \in W$. Дуга v определяет вид товара, отправляемого из предприятия.

Через $V_W^+(i)$ обозначим множество дуг, по которым на предприятие $ПР(i)$ поступают товары в качестве потребляемых ресурсов. Для любой дуги $v \in V_W^+(i)$ $h2(v) = i$. Начало дуги $j = h1(v) \in E_w$ рынка Rw товара $w \in W$. Дуга v определяет вид товара, получаемого предприятием.

В производстве товаров предприятием $ПР(i)$ принимают участие различные виды труда. Обозначим $V_L^+(i)$ множество дуг, по которым поступает труд на это предприятие. Пусть $v \in V_L^+(i)$, $j = h1(v)$. Среди множества видов труда найдется вид $l \in L$ такой , что $j \in E_l$, где E_l множество узлов конечного ориентированного графа $G_l = \langle E_l, V_l, H_l \rangle$, описывающего структуру связей локальных рынков труда вида *l*. Подробно структуры рынков труда будут описаны далее.

Пусть $v \in V_W^-(i)$, q_v – объем продукта, отправляемого по дуге v, в узел $j = h2(v)$. Этот узел принадлежит одному, и только одному множеству узлов E_w, $w \in W$. Аналогично, если $v \in V_W^+(i)$, то q_v – объем продукта получаемого в качестве потребляемого ресурса по дуге v из узла $j=h1(v)$. Этот узел принадлежит одному, и только одному множеству узлов E_w, $w \in W$.

Вектор собственных ресурсов территории, принадлежащей предприятию, обозначим через r_i, $(r_i \leq_i \overline{r_i})$, где $\overline{r_i}$ – предельный объем ресурсов предприятия, $\leq_i$ – знак неравенства в пространстве, размерности вектора r_i. Модель выпуска товаров запишем как

$$(q_v)_{v \in V_W^-(i)} \in F^i((q_v)_{v \in V_W^+(i)}, (q_v)_{V_L^+(i)}, r_i)) \quad , \tag{10}$$

где F^i – множество достижимости объемов выпускаемой продукции при заданных значениях аргументов $((q_v)_{v \in V_W^+(i)}, (q_v)_{V_L^+(i)}, r_i)$. Вектор собственных ресурсов r_i можно интерпретировать как ресурсы, добываемые на территории, и распределяемые для потребления (вообще говоря, в переработанном виде) на других предприятиях и по домашним хозяйствам экономической системы.

2.7 Задача предприятия ПР(i)

$$\pi_i = \sum_{v \in V_W^-(i)} P_{h2(v)} q_v - \left(\sum_{v \in V_W^+(i)} P_{h1(v)} q_v + \sum_{v \in V_L^+(i)} P_{h1(v)} q_v + \langle P \ r_i, r_i \rangle \right) \to \max_{\Theta_{ПР}(i)}$$

(11)

при ограничениях

$$(q_v)_{v \in V_W^-(i)} \in F^i((q_v)_{v \in V_W^+(i)}, (q_v)_{V_L^+(i)}, r_i)) \tag{12}$$

$$r_i \leq_i \overline{r}_i \tag{13}$$

$\Theta_{ПР}(i)$– список переменных, по которым берется максимум. Так на рынках, в которых предприятие монополистом, в этот список помимо прочих, могут войти переменные

$$P_{h2(v)}, v \in V_W^-(i), \ P_{h1(v)}, v \in V_W^+(i), \ \ P_{h1(v)}, v \in V_L^+(i). \tag{14}$$

2.8 Модели поведения перекупщиков на основе функций полезности в структуре экономической системы

Пусть w – вид товара, $w \in W$, этому виду товара соответствует рассредоточенный рынок R_w, имеющий структуру, задаваемую графом $G_w = \langle E_w, V_w, H_w \rangle$. Рассмотрим дугу $v \in V_w$. Для начала будем считать, что $P_{h2(v)} \geq P_{h1(v)}$, или $P_{h2(v)} - P_{h1(v)} \geq 0$. В этом случае перекупщик $ПРК(v)$, соответствующий дуге v, покупает товар (и соответственно становится его собственником) в объеме

$q_v \geq 0$ на рынке узла $h1(v)$ по цене $P_{h1(v)}$, транспортирует и продает на рынке узла $h2(v)$ по цене $P_{h2(v)}$. Прибыль перекупщика будет иметь вид:

$$F_v = P_{h2(v)} q_v - \left(P_{h1(v)} q_v + \sum_{u \in V_v^+} P_{h1(u)} q_{h1(u)} + \left\langle P\ r_v, r_v \right\rangle \right) \qquad (15)$$

первое слагаемое есть выручка от продажи в узле $h2(v)$, второе издержки, которые содержат:

покупку товара в узле $h1(v)$;

покупку ресурсов на рынках $h1(u), u \in V_v^+$ где V_v^+ – множество дуг, по которым поступают ресурсы;

стоимость ресурсов, являющихся собственностью перекупщика;

r_v – искомый вектор объемов ресурсов, используемых при транспорте купленной продукции;

$\bar{r}_v$– вектор максимальных объемов этих ресурсов;

Pr_v – вектор цен на эти ресурсы, компоненты вектора цен являются внешними переменными;

После преобразования получим

$$F_v = (P_{h2(v)} - P_{h1(v)}) q_v - \left(\sum_{u \in V_v^+} P_{h1(u)} q_{h1(u)} + \left\langle P\ r_v, r_v \right\rangle \right) \qquad (16)$$

Задача перекупщика *ПРК*(v) примет вид

$$F_v = (P_{h2(v)} - P_{h1(v)})\, q_v - \left(\sum_{u \in V_v^+} P_{h1(u)} q_{h1(u)} + \left\langle P\ r_v, r_v \right\rangle \right) \Rightarrow \max_{\Theta_{ПРК}(v)},$$
$$0 \leq q_v \leq f_v((q_{h1(u)})_{u \in V_v^+}; r_v),$$
$$0_v \leq_v r_v \leq_v \overline{r}_v, \qquad (17)$$

где $f_v((q_{h1(u)})_{u \in V_v^+}; r_v)$ – производственная функция, ограничивающая объем перевозки;

$\Theta_{ПРК}(v)$ – перечень параметров, по которым берется максимум.

Пусть $P_{h2(v)} \leq P_{h1(v)}$. В этом случае перекупщик покупает товар (становится его собственником) в объеме q_v в узле $h2(v)$ по цене $P_{h2(v)}$, транспортирует в узел $h1(v)$ и продает по цене $P_{h1(v)}$. Так как поток движется от конца дуги к ее началу, то $q_v \leq 0$. Прибыль перекупщика будет иметь вид,

$$F_v = P_{h1(v)}(-q_v) - \left(P_{h2(v)}(-q_v) + \sum_{u \in V_v^+} P_{h1(u)} q_{h1(u)} + \left\langle P\ r_v, r_v \right\rangle \right) \qquad (18)$$

первое слагаемое есть выручка от всей операции, второе издержки.

Экстремальная задача перекупщика примет вид

$$F_v = (P_{h2(v)} - P_{h1(v)})\, q_v - \left(\sum_{u \in V_v^+} P_{h1(u)} q_{h1(u)} + \left\langle P\ r_v, r_v \right\rangle \right) \Rightarrow \max_{\Theta_{ПРК}(v)},$$
$$0 \leq -q_v \leq f_v((q_{h1(u)})_{u \in V_v^+}; r_v),$$
$$0_v \leq_v r_v \leq_v \overline{r}_v. \qquad (19)$$

Объединяя оба случая, получим задачу перекупщика *ПРК*(v)

$$F_v = (P_{h2(v)} - P_{h1(v)})\, q_v - \left(\sum_{u \in V_v^+} P_{h1(u)} q_{h1(u)} + \left\langle P\ r_v, r_v \right\rangle \right) \Rightarrow \max_{\Theta_{ПРК}(v)},$$
$$|q_v| \leq f_v((q_{h1(u)})_{u \in V_v^+}; r_v),$$
$$0_v \leq_v r_v \leq_v \overline{r}_v,$$
$$sign\ (y_v) = sign\ (P_{h2(v)} - P_{h1(v)}) \qquad (20)$$

где:

$|q_v|$ – объем перевозок по дуге v ограничиваемый значением производственной функции f_v, знак q_v совпадает со знаком $(P_{h2(v)} - P_{h1(v)})$ и определяет направление движения потока по дуге;

покупка ресурсов на рынках $h1(u),\ u \in V_v^+$ где V_v^+ – множество дуг, по которым поступают ресурсы,

r_v – искомый вектор объемов ресурсов, который используется при транспорте купленной продукции,

Pr_v - стоимость ресурсов перекупщика, – вектор цен на ресурсы являются внешние переменные;

$\overline{r}_v$ – вектор максимальных объемов этих ресурсов,

$\Theta_{ПРК}(v)$ – список параметров перекупщика дуги v, по которым ведется максимизация, в этот список, в зависимости от структуры локального рынка, могут входить переменные $P_{h2(v)}, P_{h1(v)}, q_v$, компоненты вектора r_v.

3 Пространственно-рассредоточенные товарные рынки

3.1 Описание структуры модели

Как и выше, W- множество видов товаров экономической системы. Каждому виду $w \in W$ рынка соответствует свой одно-продуктовый пространственно-рассредоточенный рынок R_w [11]. Структуру рынка задаем ориентированным графом $G_w = \langle E_w, V_w, H_w \rangle$, где

E_w – множество узлов, где осуществляется обмен товаром;

V_w– множество дуг, дуге соответствует перекупщик товара;

H_w– отображения для дуг $H_w(v)=(h1(v), h2(v))$, $h1(v)$– узел, начало дуги v; $h2(v)$ – узел, конец дуги v.

Каждому $i \in E_w$ поставим в соответствии переменную P_i, которая обозначает цену обмена товара. Каждому $v \in E_w$ соответствует переменная q_v – объем перевозимого перекупщиком товара, $q_v \geq 0$, если направление потока совпадает с направлением дуги, $q_v < 0$, , в противном случае. Переменная q_v определятся моделью перекупщика этой дуги.

3.2 Граничные условия, условия продуктового баланса однопродуктового рынка товара

Разобьем множество узлов E_w товара w на три непересекающиеся части. $E_w = E_w^1 \cup E_w^2 \cup E_w^3$, где $E_w^1 \cap E_w^2 = \varnothing$, $E_w^1 \cap E_w^3 = \varnothing$, $E_w^2 \cap E_w^3 = \varnothing$.

$$\left.\begin{array}{l} z_i \ - \ \textit{свободная} \quad \textit{переменная} \\ P_i \ - \ \textit{константа} \quad , \ P_i = P^*{}_i \end{array}\right\}, \ i \in E_w^1 \qquad (21)$$

$$\left.\begin{array}{l} z_i \ - \ \textit{свободная} \quad \textit{переменная} \\ P_i \ - \ \textit{константа} \quad , \ P_i = P^*{}_i \end{array}\right\}, \ i \in E_w^1 \qquad (22)$$

$$z_i = B^*{}_i(P_i) \qquad i \in E_w^3 \qquad (23)$$

Для $z_i = B^*{}_i(P_i)$. эластичность не равна нулю и не равна бесконечности. В условиях равновесия выполняется равенство

$$\Big(\sum_{v \in V^+(i)} q_v - \sum_{v \in V^-(i)} q_v\Big) + \Big(\sum_{v \in V^+_{ПР}(i)} q_v - \sum_{v \in V^-_{ПР}(i)} q_v\Big) + \Big(-\sum_{v \in V^-_{ПРК}(i)} q_v\Big) + \Big(-\sum_{v \in V^-_{ДХ}(i)} q_v\Big) = z_i \qquad (24)$$

$$i \in E_w^2 \cup E_w^3 \qquad (25)$$

Первая скобка обозначает сумму потоков, которые ввозят перекупщики в узел, минус сумму потоков, которые вывозят перекупщики из узла. $V^+(i)$ – множество дуг, входящих в узел i, $V^-(i)$ - множество дуг, выходящих из узла i;

вторая скобка – сумму потоков товаров узлов $h1(v)$, $v \in V^+_{ПР}(i)$, ввозимых для продажи в узел i, минус сумму потоков товара, которые вывозят предприятия $h2(v)$, $v \in V^-_{ПР}(i)$ из узла i. Эти предприятия используют вывозимые потоки как ресурсы своего производства;

третья скобка – сумму потоков, которые вывозят перекупщики из узла и используют как ресурсы для транспорта товара. Дуги $v \in V^-_{ПРК}(i)$ нестандартного определения, начало дуги $h1(v)$ есть узел i, конец дуги $h2(v)$ – в свою очередь тоже дуга из множества $ПРК$;

четвертая скобка – сумму потоков, которые вывозят домашние хозяйства для потребления. Начало дуги $v \in V^-_{ДХ}(i)$ является узлом i, т.е. $h1(v) = i$;

Выражение, стоящее в (24) справа – внешнеторговый баланс.

Для узлов $i \in E_w^1$ в состоянии равновесия внешнеторговый баланс является величиной расчетной и вычисляется выражением

$$(\sum_{v \in V^+(i)} q_v - \sum_{v \in V^-(i)} q_v) + (\sum_{v \in V_{ПР}^+(i)} q_v - \sum_{v \in V_{ПР}^-(i)} q_v) + (-\sum_{v \in V_{ПРК}^-(i)} q_v) + (-\sum_{v \in V_{ДХ}^-(i)} q_v) = z_i, i \in E_w^1 \quad (26)$$

3.3 Баланс денежных потоков в узлах рынков

В узлах осуществляется товарно-денежный обмен, вместе с движением товаров происходит перенос их эквивалентной стоимости. Расчет эквивалентной стоимости обмена товаров выводится из соотношения (24)

$$(\sum_{v \in V^+(i)} q_v P_i - \sum_{v \in V^-(i)} q_v P_i) + (\sum_{v \in V_{ПР}^+(i)} q_v P_i - \sum_{v \in V_{ПР}^-(i)} q_v P_i) + (-\sum_{v \in V_{ПРК}^-(i)} q_v P_i) + (-\sum_{v \in V_{ДХ}^-(i)} q_v P_i) = z_i P_i \quad (27)$$

или

$$(\sum_{v \in V^+(i)} q_v P_i + \sum_{v \in V_{ПР}^+(i)} q_v P_i) - (\sum_{v \in V^-(i)} q_v P_i + \sum_{v \in V_{ПР}^-(i)} q_v P_i + \sum_{v \in V_{ПРК}^-(i)} q_v P_i + \sum_{v \in V_{ДХ}^-(i)} q_v P_i) = z_i P_i \quad (28)$$

Направление движения денежных потоков, которые участвуют в обмене, противоположно направлению товарных движения потоком. Отметим, что если система замкнутая, т.е. $z_i=0$, то

$$(\sum_{v \in V^+(i)} q_v P_i + \sum_{v \in V_{ПР}^+(i)} q_v P_i) - (\sum_{v \in V^-(i)} q_v P_i + \sum_{v \in V_{ПР}^-(i)} q_v P_i + \sum_{v \in V_{ПРК}^-(i)} q_v P_i + \sum_{v \in V_{ДХ}^-(i)} q_v P_i) = 0$$

(29)

4 Математическая модель рынка труда в экономико-географической системе мирового хозяйства

4.1 Описательная модель

В основу построения модели пространственно-рассредоточенного рынка труда положим модель передвижения носителей видов труда между источниками труда - домашними хозяйствами, и потребителями труда – предприятиями. Для описания структуры рынков труда, как и при описании товарных рынков, воспользуемся понятием графа. Каждому виду труда $l \in L$ соответствовать свой граф G_l. В нем узлы – локальные рынки труда - места непосредственной связи рынков с предприятиями, и места пересадок при движении по транспортной сети.

4.2 Математическая модель рынка труда

Как и выше, L конечное множество видов труда экономико-географической системы. Пусть $l \in L$, рассредоточенный рынок труда l обозначим R_l. Ему соответствует конечный ориентированный граф $G_l = \langle E_l, V_l, H_l \rangle$, описывающий структуру связей локальных рынков труда вида l. E_{ll}- остановочные пункты и пункты пересадок, где носители труда могут сменить маршрут движения. Пусть $i \in E_l$, $V^+(i)$, $V^-(i)$ – множества дуг соответственно входящих и выходящих из узла i в инцидентные узлы из E_l, через $V_{ДХ}^+(i)$, $V_{ПР}^-(i)$, $V_{ПРК}^-(i)$ обозначены множества дуг соответственно входящих в домашние хозяйства (множество *ДХ*) и выходящих в направление предприятий (множество *ПР*) и в направление перекупщиков (множество *ПРК*). Обозначим через P_i цену труда в узле i, для $v \in V_l$, q_v - величина потока труда вида l, перемещаемого по дуге v.

Ценовая взаимосвязь субъектов рынков труда. Возможны следующие 2 случая:

Первый случай. $P(h2(v) \geq P(h1(v))$, поток движется от узла $h1(v)$ к $h2(v)$, поэтому $q_v \geq 0$. Обозначим через $\theta_v(q_v)$ - стоимость транспорта носителей труда за единицу потока при общем потоке q_v по дуге v. В состоянии равновесия будет выполняться $P(h2(v) = P(h1(v)) + \theta_v(q_v)$

Второй случай. $P(h2(v)) < P(h1(v))$, поток труда движется от узла $h2(v)$ к узлу $h1(v)$. В этом случае $q_v < 0$, $\theta_v(-q_v)$ - стоимость транспорта носителей труда за единицу потока при общем потоке q_v по дуге v. В состоянии равновесия будет выполняться $P(h1(v) = P(h2(v)) + \theta_v(-q_v)$.

Объединяя оба случая, получаем, что для любого q_v

$$P(h2(v)) - P(h1(v)) = \text{sgn}(q_v)\theta_v(|q_v|), \quad (30)$$

или, $\theta_v(|q_v|) = \text{sgn}\left(P(h2(v)) - P(h1(v))\right)\left(P(h2(v)) - P(h1(v))\right)$. (31)

Обозначим через θ_v^{-1} - обратную функцию для θ_v, тогда $|q_v| = \theta_v^{-1}|P(h2(v)) - P(h1(v))|$ или $q_v = \mathrm{sgn}(P(h2(v)) - P(h1(v)))\ \theta_v^{-1}|P(h2(v)) - P(h1(v))|$, обозначая $\Delta_v = (P(h2(v)) - P(h1(v)))$, предыдущую зависимость можно записать

$$q_v = \mathrm{sgn}(\Delta_v)\ \theta_v^{-1}(\Delta_v) \qquad (32)$$

Граничные условия.

Пусть $E_l = E_l^1 \cup E_l^2 \cup E_l^3$, где $E_l^1 \cap E_l^2 = \varnothing$, $E_l^1 \cap E_l^3 = \varnothing$, $E_l^2 \cap E_l^3 = \varnothing$.

$$\left.\begin{array}{l} z_i \ - \ \textit{свободная} \quad \textit{переменная} \\ P_i \ - \ \textit{константа} \quad , P_i = P^*{}_i \end{array}\right\}, i \in E_l^1 \qquad (33)$$

$$\left.\begin{array}{l} z_i \ - \ \textit{константа} \quad , z_i = B^*{}_i \\ P_i \ - \ \textit{свободная} \quad \textit{переменная} \end{array}\right\}, i \in E_l^2 \qquad (34)$$

$$z_i = B_i^*(P_i), \qquad i \in E_l^3 \qquad (35)$$

Это на рынке труда.

Для $i \in E_l^3$ внешнеторговый баланс z_i связан с ценой P_i функцией $B_i^*(P_i)$. Для этой функции эластичность не равна нулю и не равна бесконечности. Соотношения (33) соответствуют случаю, когда моделируемая система не может повлиять на цены систем узлов $i \in E_l^1$, соотношения (24) соответствуют случаю, когда объем потребления (поставки) узлами $i \in E_l^2$ постоянный и не зависит от цены равновесия в узле.

Узловой баланс труда. Пусть $i \in E_l \setminus E_l^1$ (т.е. $i \in E_l^2 \bigcup E_l^3$), $v \in \left(V^+(i) \cup V^-(i)\right) \cup \left(\cup V^+_{ДХ}(i) \cup V^-_{ПР}(i)\right) \cup V^-_{ПРК}(i)$, для каждого $i \in E_l$ в состоянии равновесия выполняется

$$\sum_{v \in V^+(i)} q_v - \sum_{v \in V^-(i)} q_v + \sum_{v \in V^+_{ДХ}(i)} q_v - \sum_{v \in V^-_{ПР}(i)} q_v - \sum_{v \in V^-_{ПРК}(i)} q_v = B_i(P_i) \qquad (36)$$

$$\sum_{v \in V^+(i)} q_v - \sum_{v \in V^-(i)} q_v + \sum_{v \in V^+_{ДХ}(i)} q_v - \sum_{v \in V^-_{ПР}(i)} q_v - \sum_{v \in V^-_{ПРК}(i)} q_v = z_i \qquad (37)$$

Для $i \in E_l^1$ (36) является формулой расчета экспортно-импортного сальдо.

5 Узловые взаимодействия совершенной конкуренции в модели общего равновесия экономико-географической системы мирового хозяйства

5.1 Продуктовый баланс в виде экстремальной задачи

«Невидимая рука» локального продуктового рынка.

Рассмотрим произвольный вид товара $w \in W$, $i \in E_w^2 \cup E_w^3$. Узлы $i \in E_w^1$ не берем, так как для них переменная P_i – константа, на переменную z_i ограничений нет, она может принимать любые значения в соответствии с (26).

Зафиксируем для всех узлов - товарных рынков $j \in E_w \setminus \{i\}$ и всех рынков труда $j \in E_l$ значение цены P_j. Переменные P_j, $j \in (E_w \setminus \{i\}) \cup E_l$, дальше будем обозначать P_{-i}. Если в узле i рынок совершенная конкуренция, то переменная P_i независимая, переменные P_{-i}. ее функции, и (24) можно записать:

$$F = \Big(\sum_{v \in V^+(i)} \eta_v(P_i, P_{-i}) - \sum_{v \in V^-(i)} \eta_v(P_i, P_{-i})\Big) + \Big(\sum_{v \in V^+_{ПР}(i)} \eta_v(P_i, P_{-i}) - \sum_{v \in V^-_{ПР}(i)} \eta_v(P_i, P_{-i}) \qquad (38)$$

где $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$ - функция отклика потока товара на переменную P_i при постоянных значениях переменных P_{-i} для:

$V^+(i)$ перекупщиков - продавцов в узел i на цену P_i;

$V^-(i)$ перекупщиков - покупателей из узла i на цену P_i;

$v \in V^+_{ПР}(i)$ предприятий $h1(v)$ – продавцов на цену P_i;

$v \in V^-_{ПР}(i)$ предприятий $h2(v)$ - покупателей на цену P_i;

$v \in V^-_{ПРК}(i)$ перекупщиков $h2(v)$ - покупателей на цену P_i;

$v \in V^-_{ДХ}(i)$ домашних хозяйств $h2(v)$ на цену P_i;

Левую часть равенства (38) будем называть небалансом в узле i при цене P_i и обозначать $N_i(P_i, P_{-i})$, тогда (38) примет вид

$$N_i(P_i, P_{-i}) = 0 \tag{39}$$

Определение НР1. Будем говорить, что узел $N_i(P_i^*, P_{-i}) = 0$ i находится в состоянии равновесия при цене P_i^* при фиксированных P_{-i}, если выполняется. Значение P_i^* будем называть равновесной ценой рынка узла i при фиксированных P_{-i}.

Определение НР2. Будем говорить, что экономическая система находится в состоянии равновесия, если все товарные рынки и рынки труда находятся в состоянии равновесия.

Таким образом, из задач домашнего хозяйства (9), предприятий (10) и перекупщика (11), а также, граничных условий (20) – (22) и системы узловых уравнений (38) получаем эквивалентную задачу.

Пусть $\overline{P}_j$, $j \in E_w^1 \cup E_w^2 \cup E_w^3$ - решение системы узловых уравнений (38) и граничных условий (31) -- (34), тогда для любого $i \in E_w^2 \cup E_w^3$ $\overline{P}_i$, является решением одного уравнения

$$N_i(P_i, \overline{P}_{-i}) = 0 \tag{40}$$

5.2 Описание условий баланса труда в виде экстремальной задачи

«Невидимая рука локального рынка труда»

Пусть для вида труда $l \in L$, $NB_i(P_i, \overline{P}_{-i})$. Узлы $i \in E_l^1$ не берем, так как для них переменная P_i – константа, на переменную z_i ограничений нет, она может принимать любые значения в соответствии с (36).

Будем считать, что для всех узлов товарных рынков и рынков труда $j \in E_l \setminus \{i\}$ значение цены P_j зафиксировано. Переменные P_j, $j \in E \setminus \{i\}$, дальше будем обозначать P_{-i}. В условиях совершенной конкуренции все субъекты рынка i являются ценополучателями, поэтому для всех $v \in V_l$ справедливо (32)

где $\Delta_v = (P(h2(v)) - P(h1(v)))$, или $q_v = \text{sgn}(P_{h2(v)} - P_{h1(v)})\,\theta_v^{-1}(P_{h2(v)} - P_{h1(v)})$.

Для $v \in V^+(i)$ $h2(v) = i$, для $v \in V^-(i)$ $h1(v) = i$, поэтому (4.3) можно записать

$$\sum_{v \in V^+(i)} \text{sgn}(P_i - P_{h1(v)})\,\theta_v^{-1}(P_i - P_{h1(v)}) - \sum_{v \in V^-(i)} \text{sgn}(P_{h2(v)} - P_i)\,\theta_v^{-1}(P_{h2(v)} - P_i) +$$
$$+ \sum_{v \in V^+_{ДХ}(i)} (q_v) - \sum_{v \in V^-_{ПР}(i)} (q_v) - \sum_{v \in V^-_{ПРК}(i)} (q_v) = B_i(P_i) \tag{41}$$

Для $v \in V^+_{ДХ(i)}$ q_v является функцией отклика на переменную P_i при фиксированных P_{-i} соответственно задач домашних хозяйств $ДХ(j)$ для $j=h1(v)$. Для $v \in V^-_{ПР(i)}$ q_v является функцией отклика на переменную P_i при фиксированных P_{-i} соответственно задач предприятий $ПР(j)$ для $j=h2(v)$. Для $v \in V^-_{ПРК(i)}$ q_v является функцией отклика на переменную P_i при фиксированных P_{-i} соответственно задач перекупщиков $ПРК(u)$ для $u = h2(v)$ (напомним, что перекупщикам в системе обозначений соответствуют дуги графа, поэтому конец дуги v ссылается на дугу u). Таким образом (41) можно записать

$$\sum_{v \in V^+(i)} \text{sgn}(P_i - P_{h1(v)})\,\theta_v^{-1}(P_i - P_{h1(v)}) - \sum_{v \in V^-(i)} \text{sgn}(P_{h2(v)} - P_i)\,\theta_v^{-1}(P_{h2(v)} - P_i) +$$
$$+ \sum_{v \in V^+_{ДХ}(i)} (q_v) - \sum_{v \in V^-_{ПР}(i)} (q_v) - \sum_{v \in V^-_{ПРК}(i)} (q_v) - B_i(P_i) = 0 \tag{42}$$

Левую часть равенства (42) будем называть небалансом в узле i при цене P_i и фиксированных ценах P_{-i} и обозначим $N_i(P_i, P_{-i})$, тогда в состоянии узлового равновесия должно выполняться

$$N_i(P_i, P_{-i}) = 0 \tag{43}$$

Обозначив $NB_i(P_i, P_{-i}) = (N_i(P_i, P_{-i}))^2$, задачу поиска состояния равновесия в запишем как

$$P_i^* = \underset{P_i \ при \ P_{-i}=const}{\arg\min} \ NB_i(P_i, P_{-i}) \tag{44}$$

Используя термин Адама Смита, задачу (44) будем называть задачей «*невидимой руки рынка*» узла $i \in E_l^2 \cup E_l^3$. Если для всех $i \in E^2 \cup E^3$ (т.е. и для товарных рынков тоже) значения P_i^* таковы, что $NB_i(P_i^*, P_{-i}^*) = 0$, то получившееся значения дают состояния равновесия совершенной конкуренции для экономической системы в целом.

6 Численные методы анализа узловых взаимодействий несовершенной конкуренции в модели общего равновесия экономической системы

Переход от совершенной конкуренции к несовершенной заключается в смене лидерства «руки рынка» на лидерство одного из субъектов рынка. В зависимости от этого мы получаем ту или иную структуру локального рынка, и соответственно структуру всей системы. Поиск состояния равновесия всей системы, как и выше, заключается в поузловой увязке всех узловых задач.

Приведем модели узловых задач для некоторых структур несовершенной конкуренции и алгоритмы поиска состояния равновесия в них.

6.1. Описание алгоритма лидерство производителя – продавца на товарном рынке. Узловая монополия

Пусть в узле i производитель $j=h1(u)$, $u \in V_{ПР}^{+}(i)$ занял в положение лидера. Мы получаем монополию производителя j в этом узле i. В условиях монополии производителя j в узле i рыночная власть переходит к нему. Он имеет возможность на выбор значения стратегической переменной *Pi,* варьируя ей с целью максимизации своей прибыли. При этом отметим, что, как и раньше, в узле должно быть выполнено условие продуктового баланса. Так как $i = h2(u)$ задача лидера примет вид.

$$\pi_j = P_i q_u + \sum_{v \in V_W^-(j)\setminus\{u\}} P_{h2(v)} q_v - \Big(\sum_{v \in V_W^+(j)} P_{h1(v)} q_v + \sum_{v \in V_L^+(j)} P_{h1(v)} q_v + \langle P \ r_j, r_j \rangle \Big) \to \max_{\Theta_{ПР}(j)} \tag{45}$$

при ограничении

$$\big(q_u, (q_v)_{v \in V_W^-(j)\setminus\{u\}}\big) \in F^i((q_v)_{v \in V_W^+(i)}, (q_v)_{V_L^+(i)}, r_i)) \tag{46}$$

$$r_j \leq_j \overline{r}_j \tag{47}$$

Искомые переменные $\Theta_{ПР}(j) = (P_i, q_u, (q_v)_{v \in V_W^-(j)\setminus\{u\}}, (q_v)_{v \in V_W^+(j)}, (q_v)_{v \in V_L^+(j)}, r_j)$, по которым берется максимум, разобьем на 3 части: P_i, q_u, и $((q_v)_{v \in V_W^-(j)\setminus\{u\}}; (q_v)_{v \in V_W^+(j)}; (q_v)_{v \in V_L^+(j)}; r_j))$

В соответствии с этим строим трех уровневую схему максимизации π_i:

1 уровень: организация перебора по переменной P_i .

2 уровень: для каждого фиксированного P_i решаем:

2а) для каждого $k = h1(v), v \in V_{ПР}^{+}(i) \setminus \{u\}$ задачи *ПР*(k), получаем объем продаж q_v предприятиями – совершенными конкурентами;

2б) для каждого $k = h2(v), v \in V_{ПР}^{-}(i)$ задачи *ПР*(k) , получаем объем q_v потребления ресурсов с рынка i;

2в) для каждого $v \in V^{+}(i)$ задачи перекупщиков *ПРК*(v) , получаем объем ввоза q_v;

2г) для каждого $v \in V^{-}(i)$ задачи перекупщиков *ПРК*(v) получаем объем вывоза q_v;

2д) для каждого $v \in V_{ДХ}^{-}(i)$, k=h2(v), по задаче домашнего хозяйства $ДХ(k)$ находим объем потребления q_v с рынка i.

2е) рассчитываем $z_i(P_i)$;

3 уровень.

3а) На основе продуктового баланса (24) находим объем производства, который должен выпускать монополист:

$$q_u = -\Big(\sum_{v \in V^+(i)} q_v - \sum_{v \in V^-(i)} q_v\Big) - \Big(\sum_{v \in V_{ПР}^+(i)\setminus\{u\}} q_v - \sum_{v \in V_{ПР}^-(i)} q_v\Big) - \Big(-\sum_{v \in V_{ПРК}^-(i)} q_v\Big) - \Big(-\sum_{v \in V_{ДХ}^-(i)} q_v\Big) + z_i \tag{48}$$

3б) при заданном P_i и полученном q_u решаем задачу (45), в результате получаем π_j. В этом случае максимум берется по переменным $(q_v)_{v \in V_W^-(j)\setminus\{u\}}$; $(q_v)_{v \in V_W^+(j)}$; $(q_v)_{v \in V_L^+(j)}$; r_j

Как и выше, мы не уточняем, каким образом осуществляется вариация по переменной P_i, для этого может быть применена вариация любого метода одномерной оптимизации 0-*го* порядка. Также не уточняем методы решения задач второго уровня. Это можно делать любым из методов условной оптимизации. Так как каждая из этих задач может в качестве начального приближения брать решение от предыдущей итерации, то интересным является метод возвращающих направлений, модифицирующий метод возможных направлений Зонтендейка [12].

6.2. Описание алгоритма лидерство домашнего хозяйства в узле Узловая монопсония

Для того, чтобы получить модель монопсонии в узле, следует лидерство предприятия заменить на лидерство домашнего хозяйства. Место задачи (45) займет задача (8).

6.3. Алгоритм лидерства перекупщика, инцидентного локальному рынку Узловая монополия перекупщика

Рассмотрим случай, когда на рынке узла i перекупщик $u \in V^+(i)$, i=$h2(u)$, является лидером. (Случай $u \in V^-(i)$ аналогичен).

Как и выше, организуем варьирование переменной P_i для максимизации функционала задачи перекупщика (20) при $u \in V^+(i)$:

Для каждого значения P_i выполняем:

1 для каждого $v \in V^+(i) \setminus u$ и значения P_i ищем отклик $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$ на основе решения задачи перекупщика (20);

2 для каждого $v \in V^-(i)$ и значения P_i ищем отклик $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$ на основе решения задачи перекупщика (20)

3 для каждого $v \in V_{ПР}^+(i)$ предприятия–продавца $j = h1(v) \in ПР$ ищем отклик $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$ на цену P_i на основе решения задачи (19) узла j при фиксированных P_{-i};

4 для каждого $v \in V_{ПР}^-(i)$ предприятия - покупателя $j = h2(v) \in ПР$ ищем отклик $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$ на цену P_i на основе решения задачи (11) узла j при фиксированных P_{-i};

5 для каждого $v \in V_{ПРК}^-(i)$ перекупщика – покупателя $u = h2(v) \in VV = \bigcup_{w \in W} V_w$ ищем отклик $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$ на цену P_i на основе решения задачи (11) узла j при фиксированных значениях P_{-i};

6 для каждого $v \in V_{ДХ}^-(i)$ домашнего хозяйства $j = h2(v) \in ДХ$ ищем отклик $q_v = \eta_v(P_i, P_{-i})$ на цену P_i на основе решения задачи (9);

7 ищем отклик – (экспортно-импортное сальдо) z_i=$B^*_i(P_i,P_{-i})$ внешних субъектов узла i, используя полученные в пунктах 1.- 6. значения q_v, а также значение z_i пункта 7 на основе зависимости (3.4) получаем значение функционала задачи перекупщика (20) при $u \in V^+(i)$.

Используя значение P_i и значение функционала задачи перекупщика (20) при $u \in V^+(i)$ отбраковываем заведомо неоптимальные решения.

Заключение

Как отмечено в обзоре [9] модели общего равновесия имеют широкое применение в прикладных экономических исследованиях пространственно рассредоточенных систем благодаря тому, они позволяют количественно оценивать взаимосвязи между различными подсистемами экономической системы, а также воздействие различных факторов. Но «несмотря на многочисленные попытки, не удалось найти сколько-нибудь общие и естественные условия, обеспечивающие единственность и устойчивость равновесия». Предложенные модели фактически развивают и уточняют модели Эрроу – Дебре, и позволяют ответить на вопросы, поставленные в [10]. В реальной экономике, как функции полезности, так и производственные функции, используемые для описания, могут быть линейными. Изменение цен в узлах может приводить к скачкам в экстремальных задачах, описывающих поведение субъектов рынков, что в свою очередь приводит к нарушению равновесия всей системы. Для получения ответов на фундаментальные вопросы, поставленные в [10] целесообразно применение функций с постоянной эластичностью.

Данная работа содержит инструментарий для поиска состояния равновесия для случаев, когда в любом локальном рынке может быть монополист. В результате получаем огромное количество различных структур, начиная от совершенной конкуренции, каскадов монополий [11] до централизованного управления.

Литература

1. *Вальрас Л.* Элементы чистой политической экономии. – М.: Изограф, 2000. – 448 с.
2. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. – М.: Мир 1972. – 514 с.
3. *Тироль Ж.* Рынки и рыночная власть: Теория организации промышленности – СПб.: Экономическая школа, 1996. –745 с.
4. *Leontyev, V.V.* Essays in Economics: Theories, Theorizing, Facts, and Policies, 1966, 1977, 1985.
5. *Меренков А.П., Хасилев В.Я.* Теория гидравлических цепей. – М.: Наука, 1985 – 278 с.
6. *Коваленко А.Г.* Математические модели межотраслевого баланса в условиях рассредоточенного рынка – Экономика и математические методы. Т. 37, № 2, 2001. – С. 92–106.
7. *Коваленко А.Г.* К вопросу о взаимосвязи децентрализованного многопродуктового пространственно-рассредоточенного рынка и централизованного управления этой экономической системой. - Журнал экономической теории, РАН, Отделение общественных наук, Секция экономики, №3, 2012. – С. 148-154..
8. *Гальперин, В. М. Игнатьев С. М., Моргунов В. Н.* Микроэкономика: в 2–х т. Общая редакция В. М. Гальперина. – СПб.: 2000г.: Экономическая школа, – Т. 1. – 349 с.; Т. 2. – 503 с.
9. *Изотов Д.А.* Эмпирические модели общего экономического равновесия. – Пространственная Экономика. 2014- С. 138—167.)
10. *Полтерович В.М.* Кризис экономической теории. – Экономическая наука современной России. № 1, 1998 – С. 46–66.
11. *Коваленко А.Г.* Развитие математических моделей и методов теории гидравлических сетей и их применение для моделирования рассредоточенного рынка. - Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. 2006 - 307с.
12. *Zoutendijk G.* Method of feasible directions – Research Mathematician. Amsterdam-London-New York-Princeton. 1960