DOI: 10.25728/mlsd.2022.0420

АЛГОРИТМ ОПТИМИЗАЦИИ ПО CC-VAR ПОРТФЕЛЯ ОПЦИОНОВ НА СОВОКУПНОСТИ РЫНКОВ В РАНДОМИЗИРОВАННОМ БАЗИСЕ

Агасандян Г.А.
ФИЦ ИУ РАН,
Россия, г. Москва, ул. Вавилова, 40
agasand17@yandex.ru

Аннотация: Содержание доклада следует рассматривать как продолжение исследования о применении континуального критерия VaR (CC–VaR) на совокупности одного двумерного и двух одномерных теоретических рынков опционов, частично связанных между собой базовыми активами.

Ключевые слова: совокупность рынков, континуальный критерий VaR (CC–VaR), функция рисковых предпочтений (ф.р.п.), прогнозная плотность, стоимостная плотность, рандомизация, бета-распределение, процедура Неймана-Пирсона.

Введение

Содержание доклада следует рассматривать как продолжение исследования о применении континуального критерия VaR (CC–VaR) на совокупности одного двумерного и двух одномерных теоретических рынков опционов, частично связанных между собой базовыми активами [1].

Сложность объекта исследования в отношении формирования исходных данных побуждает для получения их полного аналитического описания применять специальный эконометрический подход, упрощающий вычислительные эксперименты. Решается *задача CG*, в которой сумма инвестиции задается заранее, и потому инвестор заинтересован в формировании функции рисковых предпочтений (ф.р.п.), которая будет, вообще говоря, зависеть от масштаба инвестиции.

1 Формализация, определения и дискретизация модели

Вводимая при решении задачи *CG* ф.р.п. принимает вид $\phi(\varepsilon; w)$, где w – масштабный параметр инвестиции. Требуется найти значение параметра w^* и построить из имеющихся на рынке инструментов невырожденный портфель (без сингулярной компоненты), доставляющий максимум среднего случайного дохода q при *заданной* инвестиционной сумме A и полном выполнении требований критерия CC-VaR в форме континуального множества вероятностных ограничений

$$\mathsf{P}\left\{q \ge \phi\left(\varepsilon; w\right)\right\} \ge 1-\varepsilon \quad \text{для } всех\ \varepsilon \in [0, 1]. \tag{1}$$

Изначально сформулированная теоретическая (континуальная) задача решается приближенно для дискретной модели с достаточно подробной структурой сценариев. Рассматривается совокупность одного двумерного и двух одномерных теоретических рынков с теми же базовыми активами. Сценарная дискретизация с множествами цен базовых активов $\mathsf{X} = [0, 1]$ и $\mathsf{Y} = [0, 1]$ вводится согласованным для всех рынков образом. Множество X делится на m сценариев $S_i = [x_{i-1}, x_i)$, $x_0 = 0$, $x_i = x_0 + i/m$, $i \in I = \{1, \ldots, m\}$, множество Y – на n сценариев $T_j = [y_{j-1}, y_j) \subset \mathsf{Y}$, $y_0 = 0$, $y_j = y_0 + j/n$, $j \in J = \{1, \ldots, n\}$. В примере для всех рынков $m = n = 30$.

При моделировании на квадрате цен пары активов $Q = [0, 1]\times[0, 1]$ задается равномерное распределение, которое затем дополняется введением корреляции так, чтобы оно осталось распределением и чтобы оба его маргинальных распределения сохраняли свойство равномерности на [0, 1]. Подобная конструкция, которую в эконометрике называют *копулой* [5], используется в работе.

Для двумерных распределений прогноза и стоимостей берется простой класс функций двух переменных, дающих равномерные маргинальные распределения:

$$\Phi\left(u,v\right) = uv\left(1+3\kappa\left(1-u\right)\left(1-v\right)\right),\ u, v \in [0, 1],\quad |\kappa| \le 1/3. \tag{2}$$

Введенный параметр κ равен коэффициенту корреляции. При нарушении условия на κ в 0 плотность перестает удовлетворять требованию неотрицательности. В качестве аргументов u и v в 0 вставляется пара одномерных функций распределения, также назначается параметра κ. Тогда

$$\mathsf{F}\left(x,y\right) = \Phi\left(\mathsf{F}_{\mathsf{X}}\left(x\right),\mathsf{F}_{\mathsf{Y}}\left(y\right)\right) = \mathsf{F}_{\mathsf{X}}\left(x\right)\mathsf{F}_{\mathsf{Y}}\left(y\right)\left(1+3\kappa\left(1-\mathsf{F}_{\mathsf{X}}\left(x\right)\right)\left(1-\mathsf{F}_{\mathsf{Y}}\left(y\right)\right)\right),\ x \in \mathsf{X}, y \in \mathsf{Y}. \tag{3}$$

Этот подход используется в работе при задании прогнозной и стоимостной функций распределения по каждой координате, в качестве которых берутся функции бета-распределений. Но при этом параметр κ может уже не быть коэффициентом корреляции, хотя и близок к нему.

Обе плотности (прогнозная) $p(\cdot)$ и (стоимостная) $c(\cdot)$ выбираются из семейства двухпараметрических бета-распределений, определяемого на [0, 1] плотностями с параметрами $\alpha, \mu > 0$:

$$\beta(z;\alpha,\mu): \quad z^{\alpha-1}(1-z)^{\mu-1} \big/ \mathrm{B}(\alpha,\mu),$$

где

$$\mathrm{B}(\alpha,\mu) = \int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{\mu-1}\,dz = \Gamma(\alpha)\Gamma(\mu) \big/ \Gamma(\alpha+\mu) \quad \text{и} \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty z^{\alpha-1}\exp(-z)\,dz,$$

соответственно, бета- и гамма-функции.

В примере принимается

$$p_1(x) = \beta(x; 4.0, 3.0), \quad p_2(y) = \beta(y; 3.6, 2.7), \quad c_1(x) = \beta(x; 3.6, 2.7), \quad c_2(y) = \beta(y; 3.2, 2.4). \tag{4}$$

2 Алгоритм построения оптимального комбинированного портфеля и иллюстративный пример

Для решения общей задачи (как и ряда промежуточных) используется стандартный дискретный алгоритм решения задачи *CB* (минимизации стоимости) на основе процедуры Неймана–Пирсона [6]. В алгоритме основные агрегаты участвуют в векторной форме (также и для двумерного рынка). В краткой форме алгоритм записывается последовательностью операций [2–4]:

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{p}/\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{O}(\boldsymbol{\rho}),\ \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{O}(\boldsymbol{\xi}),\ \boldsymbol{d} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{\xi}),\ \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{Td}; \tag{5}$$

$$\boldsymbol{b} = \phi(\boldsymbol{\varepsilon}, w),\ \boldsymbol{g} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{\eta}),\ A = (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{c}),\ R = (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{p}),\ y = R/A - 1. \tag{6}$$

Здесь $\boldsymbol{O}$ – оператор упорядочения вектора-операнда по возрастанию его компонент, $\boldsymbol{d}$ – прогнозный вектор вероятностей, упорядоченный по возрастанию компонент $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{T}$ – нижняя треугольная матрица, состоящая из нулей и единиц (единицы на диагонали и ниже) и обеспечивающая надлежащее суммирование компонент вектора $\boldsymbol{d}$. Отмечаем, что ф.р.п. участвует лишь в операциях 0 алгоритма, а результаты части 0 при решении задачи *CG* в итерациях не меняются.

В итерациях из примера принимается $\phi(\varepsilon; w) = w\varepsilon^{1+1/w}$.

Алгоритм решения задачи *CG* состоит из трех крупных блоков. В первом блоке ведется подготовка исходных данных. Во втором блоке решаются проблемы оптимального структурирования комбинированного портфеля. В третьем блоке применяется итеративная процедура для нахождения окончательного представления оптимального портфеля, учитывающая масштаб инвестиции. Схематично алгоритм решения можно описать перечнем следующих процедур.

В первом блоке сначала находятся векторы $\boldsymbol{p}_{b1}$, $\boldsymbol{p}_{b2}$, $\boldsymbol{c}_{b1}$, $\boldsymbol{c}_{b2}$ прогнозных вероятностей и стоимостей для сценариев рынка #0 надлежащим интегрированием функций 0 в пределах сценариев. Из них посредством нижних треугольных матриц $\boldsymbol{T}$ получаются дискретные одномерные функции распределения – векторы $\boldsymbol{p}_{t1}$, $\boldsymbol{p}_{t2}$, $\boldsymbol{c}_{t1}$, $\boldsymbol{c}_{t21}$, из которых в свою очередь строятся прогнозная и стоимостная матрицы $\boldsymbol{P_{F,0}}$, $\boldsymbol{C_{F,0}}$ соответственно уже для двумерного сценарного рынка #0 с применением операции *внешнего перемножения* $\boldsymbol{E}(\cdot,\cdot)$ векторов (аналога перемножения функций):

$$\boldsymbol{P}_{F,0} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}_{t,1}, \boldsymbol{p}_{t,2})\,(1+3\kappa_{\mathrm{P}}\,\boldsymbol{E}(1-\boldsymbol{p}_{t,1}, 1-\boldsymbol{p}_{t,2})), \quad \boldsymbol{C}_{F,0} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{c}_{t,1}, \boldsymbol{c}_{t,2})\,(1+3\kappa_{\mathrm{C}}\,\boldsymbol{E}(1-\boldsymbol{c}_{t,1}, 1-\boldsymbol{c}_{t,2})).$$

Затем по $\boldsymbol{P}_{F,0}$ и $\boldsymbol{C}_{F,0}$ находятся матрицы вероятностей для двумерных сценариев $\boldsymbol{P}_{S,0}$ и $\boldsymbol{C}_{S,0}$, а также матрица относительных доходов $\boldsymbol{R}_{S,0} = \boldsymbol{P}_{S,0}/\boldsymbol{C}_{S,0}$. Для прогнозных векторов принимаются естественные равенства $\boldsymbol{p}_{S,\mathrm{X}} = \boldsymbol{p}_{b1}$, $\boldsymbol{p}_{S,\mathrm{Y}} = \boldsymbol{p}_{b2}$, а стоимостные векторы в примере образуются по правилам $\boldsymbol{c}_{S,\mathrm{X}} = v_{\mathrm{X}}\,\boldsymbol{c}_{b1} + (1 - v_{\mathrm{X}})\,\boldsymbol{\omega}_{b1}(2, 2)$, $\boldsymbol{c}_{S,\mathrm{Y}} = v_{\mathrm{Y}}\,\boldsymbol{c}_{b2} + (1 - v_{\mathrm{Y}})\,\boldsymbol{\omega}_{b2}(2, 2)$, где $v_{\mathrm{X}} = v_{\mathrm{Y}} = 0.9$, а $\boldsymbol{\omega}_{b1}$ и $\boldsymbol{\omega}_{b2}$ – вероятностные векторы размерности m и n, получаемые из плотностей бета-распределений $\beta(x; 2.0, 2.0)$ и $\beta(y; 2.0, 2.0)$. Снова $\boldsymbol{\rho}_{S,\mathrm{X}} = \boldsymbol{p}_{S,\mathrm{X}}/\boldsymbol{c}_{S,\mathrm{X}}$, $\boldsymbol{\rho}_{S,\mathrm{Y}} = \boldsymbol{p}_{S,\mathrm{Y}}/\boldsymbol{c}_{S,\mathrm{Y}}$. Эффект относительной независимости рынков усиливается введением стоимостных множителей $\chi_{\mathrm{X}} = 1.05$, $\chi_{\mathrm{Y}} = 1.06$ (обратных к безрисковым относительным доходам r_{X} и r_{Y} величин, см. [1])

Во втором блоке по правилам замещений [1] строятся множества замещений M_k, $k = 0, 1, 2$, и матрица замещений **A**. В ней 243 нуля, 322 единицы и 335 двоек. Структуру матрицы и оптимального портфеля передает рис. 1 цветами: белым для нулей, серым для единиц и черный для двоек.

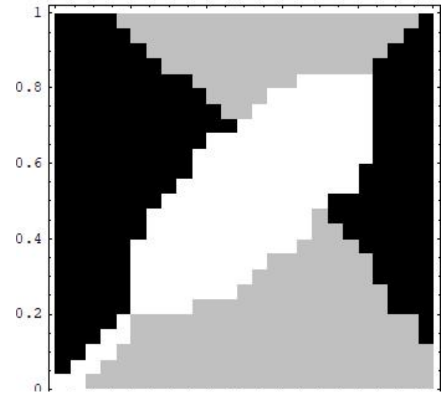

Рис. 1. Структура оптимального портфеля

Для рынков #X, #Y вычисляются векторы $\boldsymbol{p}_{M,\mathrm{X}}$, $\boldsymbol{p}_{M,\mathrm{Y}}$ суммарных вероятностей замещения, векторы параметров $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{X}}$, $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{Y}}$ случайных последовательностей замещения, образованных независимыми случайными величинами Бернулли, а также векторы $\boldsymbol{c}_{M,\mathrm{X}}$, $\boldsymbol{c}_{M,\mathrm{Y}}$ и $\boldsymbol{\rho}_{M,\mathrm{X}}$, $\boldsymbol{\rho}_{M,\mathrm{Y}}$.

Далее матрицы $\{\boldsymbol{C}_{S,0}, \boldsymbol{P}_{S,0}, \boldsymbol{R}_{S,0}\}$ после очевидной операции обнуления преобразуются лексикографически в векторы $\boldsymbol{c}_{M,0}$, $\boldsymbol{p}_{M,0}$, $\boldsymbol{\rho}_{M,0}$ соответственно. Из них конкатенацией троек цен, вероятностей и относительных доходов получаются векторы $\boldsymbol{c}_{cmb}$, $\boldsymbol{p}_{cmb}$, $\boldsymbol{\rho}_{cmb}$ размерности $mn + m + n = 960$.

Для сравнения и оценивания результатов комбинирования приводятся записи результатов (инвестиционная сумма, средний доход, средняя доходность) применения стандартного дискретного алгоритма для рынков #0, #X, #Y по отдельности с ф.р.п. $\phi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\varepsilon}^2$, т.е. при $w = 1$:

$$\boldsymbol{L}_0 = \langle 0.305686, 0.335018, 0.0959545 \rangle,$$

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{X}} = \langle 0.35744, 0.36442, 0.0195267 \rangle, \quad \boldsymbol{L}_{\mathrm{Y}} = \langle 0.358755, 0.362834, 0.0113697 \rangle.$$

В проведенных построениях никак не участвует ф.р.п. инвестора (задействованы лишь процедуры 0 алгоритма), и потому полученные результаты не зависят от масштабного параметра w.

В третьем блоке включается итеративная процедура по параметру w с использованием метода Ньютона, и наступает черед части 0 алгоритма. Комбинированный портфель начинает строиться также с $w = 1$. Применяется стандартный для задач с критерием CC–VaR алгоритм оптимизации к более сложно организованной тройке векторов $\{\boldsymbol{c}_{cmb}, \boldsymbol{p}_{cmb}, \boldsymbol{\rho}_{cmb}\}$. Для этого значения параметра находятся векторы $\boldsymbol{b}_{cmb} = \phi(\boldsymbol{\varepsilon}_{cmb}; 1)$ и $\boldsymbol{g}_{cmb} = \boldsymbol{b}_{cmb}(\boldsymbol{\eta}_{cmb})$. При этом (начальная) *запись* результатов

$$\boldsymbol{L}_{cmb} = \langle 0.305701, 0.335898, 0.0987802 \rangle.$$

Итеративная процедура осуществляет пересчет всех параметров задачи и продолжается до достижения уровня $A_{cmb} = 1$. Это наступает при $w^* = 2.5855$ с *записью* результатов

$$\boldsymbol{L}_{cmb} = \langle 1.0, 1.09081, 0.0908083 \rangle.$$

Получаемые в расчетах результаты показывают снижение доходности при росте параметра w от единицы до 2.5855, что выглядит логичным следствием снижения инвестором (посредством ф.р.п.) своей готовности рисковать при возрастании масштаба инвестиции.

График платежной функции комбинированного портфеля приводится на рис. 2.

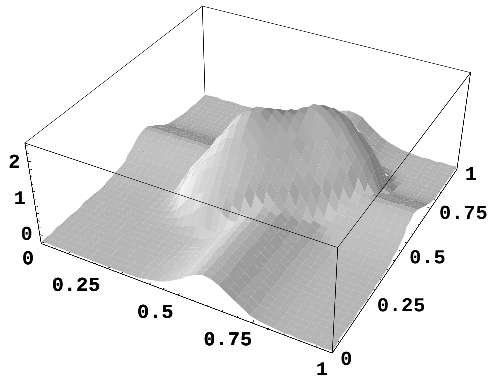

Рис. 2. Доходы оптимального комбинированного портфеля (в идеалистичной версии)

Литература

1. *Агасандян Г.А.* Рандомизация портфеля опционов в задачах оптимизации по CC-VaR на совокупности рынков // Материалы пятнадцатой международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» MLSD’2022, 26-28 сентября. Москва, ИПУ РАН. Печатается в настоящих материалах.
2. *Агасандян Г.А*. Континуальный критерий VaR и оптимальный портфель инвестора // Управление большими системами, 73 (2018). С. 6-26.
3. *Агасандян Г.А*. Континуальный критерий VaR на сценарных рынках // Информатика и ее применения. // Информатика и её применения, 2018. Т. 12. Вып. 1. С. 32–40.
4. *Агасандян Г.А*. Многомерные рынки опционов и оптимизация по CC-VaR // Управление большими системами, 88 (2020). С. 5–25.
5. *Благовещенский Ю.Н.* Основные элементы теории копул // Прикладная эконометрика. 2012. Т. 26. Вып. 2. С. 113-130.
6. *Крамер Г.* Математические методы статистики / Пер. с англ.– М.: Мир, 1975. 750 с. (Cramer H. Mathematical methods of statistics. – Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 1946. 575 p.)