DOI: 10.25728/mlsd.2022.0478

ОБ ОДНОЙ ИГРЕ С ПРАВОМ ПЕРВОГО ХОДА ПРИ НЕТОЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ЦЕЛИ ПАРТНЕРА

Горелов М.А.
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Россия, г. Москва, ул. Вавилова, д.44, кор.2
griefer@ccas.ru

Аннотация: Рассматривается модель двухуровневой иерархической системы со сложной структурой передаваемой информации. Такого рода модели могут описывать, например, процесс выделения ресурсов под производственную программу. Найден максимальный гарантированный результат игрока верхнего уровня, обладающего правом первого хода. Описана структура одной из его оптимальных стратегий.

Ключевые слова: информационная теория иерархических систем, игры с неопределенными факторами, максимальный гарантированный результат, выделение ресурсов под производственную программу.

Введение

Первой работой по теории иерархических игр можно считать статью [1], в которой был вычислен максимальный гарантированный результат и найдена структура оптимальной стратегии в игре, позднее получившей название Γ_2 [2]. Идеи, изложенные в этой статье, оказались весьма плодотворными. Рассмотренная в [1] задача обобщалась в нескольких направлениях, два из которых имеют непосредственное отношение к теме данной статьи.

В [3] было введено понятие метарасширения. Результат статьи [1] можно рассматривать как вычисление максимального гарантированного результата в метарасширении ранга 1. Практически сразу был вычислен максимальный гарантированный результат в метарасширении ранга 2 [4]. Чуть позднее выяснилось, что дальнейшее увеличение ранга метарасширения уже не интересно: задача становится формально более сложной, но по существу ничего нового не получается [5].

Для метарасширений рангов 0, 1 и 2 (игр Γ_1, Γ_2 и Γ_3 соответственно) были найдены убедительные содержательные интерпретации соответствующих задач и результатов [2].

Был также выполнен большой цикл работ, посвященных играм с агрегированной информацией, занимающим в определенном смысле промежуточное положение между играми Γ_1 и Γ_2 (см., например, [6]).

Все упомянутые выше работы рассматривают «идеальные» модели, в которых предполагается, что игроку верхнего уровня (оперирующей стороне) точно известны все параметры управляемой системы. Но вскоре было начато исследование более реалистичных моделей, учитывающих наличие неопределенных факторов (см., например, [7]). Это направление развивалось весьма активно. Было выпущено несколько книг, целиком или частично посвященных данной теме [8 - 10].

Аналогичные задачи изучались в теории активных систем (обзор и дальнейшие ссылки см. в [11]) и теории контрактов [12].

Но все работы в данном направлении относятся к обобщениям игры Γ_2. Аналогичных результатов, касающихся обобщений игры Γ_3, до сих пор не было. Между тем, модели такого типа могут описывать весьма важные задачи управления, например, выделение централизованных ресурсов под производственную программу. Поэтому они представляют определенный интерес. Одна из таких задач рассмотрена в данной статье. Возможно несколько способов введения неопределенных факторов в модель иерархической системы. В данной статье используется способ, предложенный в [7].

Существуют два способа определения максимального гарантированного результата в игре с фиксированной последовательностью ходов [8, 13]. В подавляющем большинстве практически интересных случаев они оказываются эквивалентными. В данной работе выбрано определение из [13]. В моделях со сложной структурой им пользоваться гораздо удобнее.

1 Описание модели

Рассмотрим простейшую иерархическую систему управления, состоящую из двух элементов. Будем называть их Центром и агентом. Все дальнейшее исследование проводится с точки зрения и в интересах Центра. Соответственно, все детали описываемой в данном разделе модели отражают представления Центра о рассматриваемой иерархической системе.

Предположим, что Центр выбирает свое управление u из некоторого множества U, а агент –

управление v из множества V. Будем считать, что множества U и V точно известны центру.

Цель Центра будем описывать стремлением к максимизации значения функции $g(u,v)$, зависящей как от его собственного решения, так и от выбора, сделанного агентом. Агент тоже имеет собственные цели, отличные, вообще говоря, от целей Центра. Но цели агента Центру известны неточно. Будем описывать представления Центра о целях агента следующим образом. Он считает, что агент максимизирует значение функции $h(u,v,\alpha)$, зависящей от выборов обоих субъектов рассматриваемой системы и от некоторого неопределенного фактора α. Информация об этом неопределенном факторе Центру недоступна, но он знает, что фактор α принадлежит известному множеству A. Будем считать, что эти представления не противоречат действительности, то есть цели агента на самом деле могут быть описаны стремлением к максимизации функции h при некотором значении α.

Опишем порядок обмена информацией в рассматриваемой иерархической системе. Предположим, что агент в момент окончательного выбора своего управления рассчитывает и, действительно, будет иметь достоверную информацию об управлении u, выбранном Центром. Соответственно, он может разработать план своих действий $v_{\#}$ в зависимости от полученной информации. Этот план агент сообщает Центру. Кроме того, агент сообщает Центру о значении неопределенного фактора, которому соответствуют его цели. Но два передаваемых агентом Центру сообщения имеют разный характер. Сообщение о выбранном плане $v_{\#}$ носит «юридически обязывающий» характер и должно быть достоверным. Сообщение же о неопределенном факторе не обязано быть истинным и Центр никак не может проверить его достоверность.

Чтобы описать все сказанное игрой в нормальной форме, поступим следующим образом. Введем обозначение. Символ $\Phi(X,Y)$ будет обозначать класс всех функций, отображающих множество X в множество Y.

Множество стратегий агента $V_{\#} = \Phi(U,V) \times A$. Любая стратегия $(v_{\#},\beta) \in V_{\#}$ состоит из плана $v_{\#} \in \Phi(U,V)$ и выбранного сообщения $\beta \in A$ о значении неопределенного фактора. Множество стратегий Центра $U_{\#}$ состоит из всех возможных способов реагировать на полученную информацию, то есть $U_{\#} = \Phi(\Phi(U,V) \times A,U)$. Если игроки выберут стратегии $u_{\#} \in U_{\#}$и $(v_{\#},\beta) \in V_{\#}$, то их выигрыши составят $g_{\#}(u_{\#},(v_{\#},\beta)) = g(u_{\#}(v_{\#},\beta),v_{\#}(u_{\#}(v_{\#},\beta))$ (у Центра) и $h_{\#}(u_{\#},(v_{\#},\beta),\alpha) = h(u_{\#}(v_{\#},\beta),v_{\#}(u_{\#}(v_{\#},\beta),\alpha)$ (у агента). Таким образом, получим игру в нормальной форме $\Gamma_{\#} = \langle U_{\#}, V_{\#}, A, g_{\#}, h_{\#} \rangle$.

Смысл этих конструкций таков. Пусть игроки выбрали стратегии $u_{\#}$ и $(v_{\#},\beta)$. Тогда можно найти управление $u_{\#}(v_{\#},\beta) \in U$ Центра, а затем и управление $v_{\#}(u_{\#}(v_{\#},\beta)) \in V$ агента. Выигрыши игроков зависят лишь от этих «физических» управлений и от реального значения неопределенного фактора, описывающего интересы агента. От той информации, которой обменивались игроки в процессе принятия решений, выигрыши никак не зависят.

Остается описать отношение Центра к неопределенности. Будем считать, что Центр обладает правом первого хода, то есть он первым выбирает свою стратегию $u_{\#}$ и сообщает о сделанном выборе партнеру. Тогда агент принимает свое решение в условиях полной определенности, и его поведение становится в известной степени предсказуемым. Имея информацию о целях агента, Центр может отделить рациональные выборы агента от неразумных. Он может считать, что агент выберет рациональную стратегию, а в остальном этот выбор остается для него неизвестным. Будем полагать, в соответствии с общей методологией, что по отношению к этой неопределенности Центр осторожен.

Все сказанное формализуется с помощью следующего определения.

Определение 1. Число γ называется гарантированным результатом Центра в игре $\Gamma_{\#}$, тогда и только тогда, когда существует такая стратегия, $u_{\#} \in U_{\#}$, что для любого $\alpha \in A$ найдется число λ, для которого выполняются следующие два условия:

1. существует стратегия $(w_{\#},\delta) \in V_{\#}$, для которой $h_{\#}(u_{\#},(w_{\#},\delta),\alpha) \geq \lambda$;
2. для любой стратегии $(v_{\#},\beta) \in V_{\#}$ или $g_{\#}(u_{\#},(v_{\#},\beta)) \geq \gamma$, или $h_{\#}(u_{\#},(v_{\#},\beta),\alpha) < \lambda$.

Точная верхняя грань гарантированных результатов Центра называется его максимальным гарантированным результатом. Про стратегию $u_{\#}$, для которой выполняются указанные условия, будем говорить, что она гарантирует получение результата γ.

Смысл введенных конструкций состоит в следующем. Для каждого $\alpha \in A$ Центр считает рациональными выборы агента, для которых $h_{\#}(u_{\#},(v_{\#},\beta),\alpha) \geq \lambda$. Первый пункт определения отвечает за то, что рациональные выборы у агента существуют (поскольку он не может отказаться от игры). Второй пункт определения можно сформулировать так: если $h_{\#}(u_{\#},(v_{\#},\beta),\alpha) \geq \lambda$, то $g_{\#}(u_{\#},(v_{\#},\beta)) \geq \gamma$. Другими словами, он означает, что, при всяком рациональном выборе агента, Центр получит выигрыш, больший или равный γ.

В дальнейшем, во избежание некоторых технических сложностей, будем предполагать, что множества U,V и A наделены топологиями и компактны, функция g непрерывна на декартовом произведении $U \times V$, а функция $h(u,v,\alpha)$ непрерывна на $U \times V \times A$.

2 Упрощенная характеристика гарантированного результата

В определении максимального гарантированного результата в игре $\Gamma_\#$ присутствуют сложные функциональные объекты $u_\# \in \Phi(\Phi(U,V) \times A,U)$, $v_\# \in \Phi(U,V) \times A$ и т.д. Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы сделать более конструктивным описание множества гарантированных результатов. Путь к упрощению начнем с двух шагов в сторону усложнения.

Прежде всего, заметим, что для стратегии $(w_\#,\delta)$, существование которой предусмотрено первым пунктом определения 1, неравенство $h_\#(u_\#,(w_\#,\delta),\alpha) < \lambda$ не выполняется, значит, в силу второго пункта определения должно выполняться неравенство $g_\#(u_\#,(w_\#,\delta)) \geq \gamma$. Поэтому, ничего не меняя по существу, первый пункт определения 1 можно заменить более жестким условием «существует стратегия $(w_\#,\delta) \in V_\#$, для которой $h_\#(u_\#,(w_\#,\delta),\alpha) \geq \lambda$ и $g_\#(u_\#,(w_\#,\delta)) \geq \gamma$».

Далее, можно сказать, что число γ является гарантированным результатом Центра в игре $\Gamma_\#$, тогда и только тогда, когда существуют такие стратегия $u_\# \in U_\#$ и функция $\lambda_\# \in \Phi(A,\mathbf{R})$, что для любого $\alpha \in A$ выполняются следующие два условия:

1. существует стратегия $(w_\#,\delta) \in V_\#$, для которой $h_\#(u_\#,(w_\#,\delta),\alpha) \geq \lambda_\#(\alpha)$ и $g_\#(u_\#,(w_\#,\delta)) \geq \gamma$;
2. для любой стратегии $(v_\#,\beta) \in V_\#$ или $g_\#(u_\#,(v_\#,\beta)) \geq \gamma$, или $h_\#(u_\#,(v_\#,\beta),\alpha) < \lambda_\#(\alpha)$.

Это условие эквивалентно следующему: существуют функция $\lambda_\# \in \Phi(A,\mathbf{R})$ и такие стратегии $\varpi_\# \in U_\#$ и $\omega \in U_\#$, что для любого $\alpha \in A$ выполняются следующие два условия:

1. существует стратегия $(w_\#,\delta) \in V_\#$, для которой $h_\#(\varpi_\#,(w_\#,\delta),\alpha) \geq \lambda_\#(\alpha)$ и $g_\#(\varpi_\#,(w_\#,\delta)) \geq \gamma$;
2. для любой стратегии $(v_\#,\beta) \in V_\#$ или $g_\#(\omega_\#,(v_\#,\beta)) \geq \gamma$, или $h_\#(\omega_\#,(v_\#,\beta),\alpha) < \lambda_\#(\alpha)$.

Действительно, из первого условия следует второе, поскольку всегда можно положить $\omega_\# = \varpi_\# = u_\#$. Обратно, из второго условия следует первое, так как можно положить

$$u_\#(v_\#,\beta) = \begin{cases} \varpi_\#(v_\#,\beta), \text{ если } g_\#(\varpi_\#,(v_\#,\beta)) \geq \gamma, \\ \omega_\#(v_\#,\beta) \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{1}$$

Итак, получаем: число γ является гарантированным результатом Центра в игре $\Gamma_\#$, тогда и только тогда, когда существуют такие функция $\lambda_\# \in \Phi(A,\mathbf{R})$ и стратегии $\varpi_\# \in U_\#$ и $\omega \in U_\#$, что для любого $\alpha \in A$ выполняются следующие два условия:

1. существует стратегия $(w_\#,\delta) \in V_\#$, для которой $h_\#(\varpi_\#,(w_\#,\delta),\alpha) \geq \lambda_\#(\alpha)$ и $g_\#(\varpi_\#,(w_\#,\delta)) \geq \gamma$;
2. для любой стратегии $(v_\#,\beta) \in V_\#$ или $g_\#(\omega_\#,(v_\#,\beta)) \geq \gamma$, или $h_\#(\omega_\#,(v_\#,\beta),\alpha) < \lambda_\#(\alpha)$.

Это условие можно записать в виде: число γ является гарантированным результатом Центра в игре $\Gamma_\#$, тогда и только тогда, когда существуют такие функция $\lambda_\# \in \Phi(A,\mathbf{R})$ и стратегии $\varpi_\# \in U_\#$ и $\omega \in U_\#$, что выполняются следующие два условия:

1. для любого $\alpha \in A$ существует стратегия $(w_\#,\delta) \in V_\#$, для которой $h_\#(\varpi_\#,(w_\#,\delta),\alpha) \geq \lambda_\#(\alpha)$ и $g_\#(\varpi_\#,(w_\#,\delta)) \geq \gamma$;
2. для любого $\alpha \in A$ и любой стратегии $(v_\#,\beta) \in V_\#$ или $g_\#(\omega_\#,(v_\#,\beta)) \geq \gamma$, или $h_\#(\omega_\#,(v_\#,\beta),\alpha) < \lambda_\#(\alpha)$.

Наконец, можно придать этому условию следующий вид: число γ является гарантированным результатом Центра в игре $\Gamma_\#$, тогда и только тогда, когда существует такая функция $\lambda_\# \in \Phi(A,\mathbf{R})$, что выполняются следующие два условия:

1. существует стратегия $\varpi_\# \in U_\#$ такая, что для любого $\alpha \in A$ существует стратегия $(w_\#,\delta) \in V_\#$ для которой $h_\#(\varpi_\#,(w_\#,\delta),\alpha) \geq \lambda_\#(\alpha)$ и $g_\#(\varpi_\#,(w_\#,\delta)) \geq \gamma$;
2. существует такая стратегия $\omega \in U_\#$, что для любого $\alpha \in A$ и любой стратегии $(v_\#,\beta) \in V_\#$ или $g_\#(\omega_\#,(v_\#,\beta)) \geq \gamma$, или $h_\#(\omega_\#,(v_\#,\beta),\alpha) < \lambda_\#(\alpha)$.

Конкретизируем функцию $\lambda_\#$. Положим

$$H(\gamma) = \{(u,v) \in U \times V \colon g(u,v) \geq \gamma\} \tag{2}$$

и

$$l(\alpha,\gamma) = \max_{(u,v)\in H(\gamma)} h(u,v,\alpha). \tag{3}$$

Для стратегии $(w_\#,\delta)$ из пункта 1 последнего условия имеем $g(\varpi_\#(w_\#,\delta),w_\#(\varpi_\#(v_\#,\delta))) =$ $= g_\#(\varpi_\#,(w_\#,\delta)) \geq \gamma$, поэтому выполняется включение $(\varpi_\#(w_\#,\delta),w_\#(\varpi_\#(v_\#,\delta)) \in H(\gamma)$ и, значит,

$\lambda_{\#}(\alpha) \le h_{\#}(\varpi_{\#},(w_{\#},\delta),\alpha) = h(\varpi_{\#}(w_{\#},\delta),w_{\#}(\varpi_{\#}(v_{\#},\delta),\alpha) \le l(\alpha,\gamma)$.

Теперь заметим, что условие «существует стратегия $\varpi_{\#} \in U_{\#}$ такая, что для любого $\alpha \in A$ существует стратегия $(w_{\#},\delta) \in V_{\#}$, для которой $h_{\#}(\varpi_{\#},(w_{\#},\delta),\alpha) \ge l(\alpha,\gamma)$ и $g_{\#}(\varpi_{\#},(w_{\#},\delta)) \ge \gamma$» выполняется всегда. Достаточно выбрать точки (u^{α},v^{α}), доставляющие максимум $\max_{(u,v)\in H} h(u,v,\alpha)$, положить $\varpi_{\#}(w_{\#},\beta) = u^{\beta}$ и для заданного α выбрать стратегию $(w_{\#},\alpha)$, у которой $w_{\#}(u) \equiv v^{\alpha}$.

Поэтому для того, чтобы число γ было гарантированным результатом, необходимо и достаточно выполнения условия: существует такая стратегия $\omega_{\#} \in U_{\#}$, что для любого $\alpha \in A$ и любой стратегии $(v_{\#},\beta) \in V_{\#}$ или $g_{\#}(\omega_{\#},(v_{\#},\beta)) \ge \gamma$, или $h_{\#}(\omega_{\#},(v_{\#},\beta),\alpha) < l(\alpha,\gamma)$ (если это условие выполнено, то достаточно положить $\lambda_{\#}(\alpha) = l(\alpha,\gamma)$).

Перепишем это условие в виде: существует такая стратегия $\omega \in U_{\#}$, что для любой стратегии $(v_{\#},\beta) \in V_{\#}$ и любого $\alpha \in A$ или $g_{\#}(\omega_{\#},(v_{\#},\beta)) \ge \gamma$, или $h_{\#}(\omega_{\#},(v_{\#},\beta),\alpha) < l(\alpha,\gamma)$.

Теперь уместно вспомнить о структуре множеств стратегий и функций выигрыша в рассматриваемой игре. Рассматриваемое условие запишется в виде: существует такая стратегия $\omega_{\#} \in \Phi(\Phi(U,V) \times A,U)$, что для любой стратегии $(v_{\#},\beta) \in \Phi(U,V) \times A$ и любого $\alpha \in A$ или $g(\omega_{\#}(v_{\#},\beta),v_{\#}(\omega_{\#}(v_{\#},\beta))) \ge \gamma$, или $h(\omega_{\#}(v_{\#},\beta),v_{\#}(\omega_{\#}(v_{\#},\beta)),\alpha) < l(\alpha,\gamma)$.

К этому условию можно применить, но «в обратном порядке», то преобразование, которое использовалось в самом начале нашего рассуждения. Тогда оно запишется в виде: для любой стратегии $(v_{\#},\beta) \in \Phi(U,V) \times A$ найдется такое $u \in U$, что для любого $\alpha \in A$ или $g(u,v_{\#}(u)) \ge \gamma$, или $h(u,v_{\#}(u),\alpha) < l(\alpha,\gamma)$.

Так как фраза «найдется такое $u \in U$, что для любого $\alpha \in A$ или $g(u,v_{\#}(u)) \ge \gamma$, или $h_{\#}(u,v_{\#}(u),\alpha) < l(\alpha)$» не содержит переменной β, последнее условие можно упростить, записав его в виде: для любой функции $v_{\#} \in \Phi(U,V)$ найдется такое $u \in U$, что для любого $\alpha \in A$ или $g(u,v_{\#}(u)) \ge \gamma$, или $h(u,v_{\#}(u),\alpha) < l(\alpha,\gamma)$.

Еще раз применив тот же прием, придем к равносильному условию: существует такое $u \in U$, что для любых $v \in V$ и $\alpha \in A$ либо $g(u,v) \ge \gamma$, либо $h(u,v,\alpha) < l(\alpha,\gamma)$.

Таким образом, основная задача выполнена: в последнее условие никакие «функциональные» переменные не входят и справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Число γ является гарантированным результатом Центра в игре $\Gamma_{\#}$, тогда и только тогда, когда существует такое $u \in U$, что для любых $v \in V$ и $\alpha \in A$, либо $g(u,v) \ge \gamma$, либо $h(u,v,\alpha) < l(\alpha,\gamma)$.

3 Вычисление максимального гарантированного результата

Фиксируем $u \in U$, так что для любых $v \in V$ и $\alpha \in A$ либо $g(u,v) \ge \gamma$, либо $h(u,v,\alpha) < l(\alpha,\gamma)$. Рассмотрим множество $A'(u,\gamma)$ тех $\alpha \in A$, для которых неравенство $h(u,v,\alpha) < l(\alpha)$ выполняется для всех $v \in V$ и множество $A''(u,\gamma) = A \setminus A'(u,\gamma)$.

Множество $A'(u,\gamma)$ можно охарактеризовать формулой

$$A'(u,\gamma) = \left\{\alpha \in A : \max_{v\in V} h(u,v,\alpha) < l(\alpha,\gamma)\right\}. \tag{4}$$

Максимум в этой формуле достигается, так как множество V компактно, а функция $h(u,v,\alpha)$ непрерывна по v (все топологические результаты в необходимой общности можно найти в [14]). Из стандартных теорем анализа следует, что функция $l(\alpha,\gamma)$ непрерывна по α при любом фиксированном γ. Следовательно, множество $A'(u,\gamma)$ открыто, а множество $A''(u,\gamma)$ компактно.

Пусть $\alpha \in A''(u,\gamma)$, то есть $\max_{v\in V} h(u,v,\alpha) \ge l(\alpha,\gamma)$. Тогда в силу выбора управления u для точки v^0, доставляющей этот максимум, пара (u,v^0) принадлежит множеству $H(\gamma)$. Значит, по определению функции $l(\alpha,\gamma)$ имеем

$$\max_{v\in V} h(u,v,\alpha) = h(u,v^0,\alpha) \le l(\alpha,\gamma). \tag{5}$$

Таким образом, на самом деле $\max_{v\in V} h(u,v,\alpha) = l(\alpha,\gamma)$.

Но тогда в силу выбора u для всех v, принадлежащих множеству

$$E(u,\alpha) = \left\{v \in V : h(u,v,\alpha) = \max_{w\in V} h(u,w,\alpha)\right\} \tag{6}$$

должно выполняться неравенство $g(u,v) \ge \gamma$. Это значит, что

$$\min_{v \in E(u,\alpha)} g(u,v) \geq \gamma. \tag{7}$$

Это условие должно выполняться для всех $\alpha \in A''(u,\gamma)$, следовательно

$$\min_{\alpha \in A''(u,\gamma)} \min_{v \in E(u,\alpha)} g(u,v) \geq \gamma. \tag{8}$$

Таким образом, γ является гарантированным результатом, тогда и только тогда, когда

$$\sup_{u \in U} \min_{\alpha \in A''(u,\gamma)} \min_{v \in E(u,\alpha)} g(u,v) > \gamma, \tag{9}$$

или верхняя грань в этой формуле достигается и

$$\max_{u \in U} \min_{\alpha \in A''(u,\gamma)} \min_{v \in E(u,\alpha)} g(u,v) = \gamma. \tag{10}$$

Стандартными и несложными, но довольно длинными рассуждениями показывается, что функция

$$c(\gamma) = \max_{u \in U} \min_{\alpha \in A''(u,\gamma)} \min_{v \in E(u,\alpha)} g(u,v) - \gamma \tag{11}$$

непрерывна, не возрастает и меняет знак на отрезке $\left[\min_{(u,v) \in U \times V} g(u,v), \max_{(u,v) \in U \times V} g(u,v)\right]$. Корень уравнения $c(\gamma) = 0$ является максимальным гарантированным результатом Центра в игре $\Gamma_{\#}$.

Случай, когда уравнение $c(\gamma) = 0$ имеет более одного корня, требует дополнительного исследования. Но в этом случае задача вычисления максимального гарантированного результата является неустойчивой: максимальный гарантированный результат может меняться на конечную величину при сколь угодно малых изменениях параметров игры (например, функции выигрыша агента). Поэтому исследование этого случая целесообразно проводить одновременно с регуляризацией этой задачи, что выходит за рамки данной работы.

4 Структура оптимальной стратегии

Пусть γ – гарантированный результат в игре $\Gamma_{\#}$ (заметим, что в общем случае максимальный гарантированный результат может не быть гарантированным результатом; в этом смысле данная задача не отличается от других задач теории иерархических игр). В нетривиальных случаях, можно найти много существенно различных стратегий Центра, гарантирующих получение такого результата. Полученные выше результаты позволяют описать структуру одной из них. В данном разделе мы сделаем это и обсудим некоторые свойства построенной стратегии.

Выберем управление $u \in U$ так, что

$$\min_{\alpha \in A''(u,\gamma)} \min_{v \in E(u,\alpha)} g(u,v) \geq \gamma. \tag{12}$$

Для каждого $\alpha \in A$ фиксируем пару $(u^{\alpha},v^{\alpha}) \in H(\gamma)$, для которой $h(u^{\alpha},v^{\alpha},\alpha) = l(\alpha,\gamma)$.

Определим стратегию $u_{\#}$ следующим образом. Если $\beta \in A'(u,\gamma)$ и $v_{\#}(u^{\beta}) = v^{\beta}$, то положим $u_{\#}(v_{\#},\beta) = u^{\beta}$. Во всех остальных случаях положим $u_{\#}(v_{\#},\beta) = u$.

При таком выборе стратегии $u_{\#}$ для любого $\alpha \in A$ найдется число λ, для которого выполняются следующие два условия:

1. существует стратегия $(w_{\#},\delta) \in V_{\#}$, для которой $h_{\#}(u_{\#},(w_{\#},\delta),\alpha) \geq \lambda$;
2. для любой стратегии $(v_{\#},\beta) \in V_{\#}$ или $g_{\#}(u_{\#},(v_{\#},\beta)) \geq \gamma$, или $h_{\#}(u_{\#},(v_{\#},\beta),\alpha) < \lambda$.

В самом деле, фиксируем произвольное $\alpha \in A$ и положим $\lambda = l(\alpha,\gamma)$.

Если $\alpha \in A'(u,\gamma)$, то положим $w_{\#}(\omega) = v^{\alpha}$ при всех $\omega \in U$ и $\delta = \alpha$. Тогда для стратегии $(w_{\#},\delta)$ первое условие выполнено. Далее, если стратегия $(v_{\#},\beta)$ такова, что $v_{\#}(u^{\beta}) = v^{\beta}$, то $g_{\#}(u_{\#},(v_{\#},\beta)) = g(u^{\beta},v^{\beta}) \geq \gamma$, поскольку $(u^{\beta},v^{\beta}) \in H(\gamma)$. А во всех остальных случаях $h_{\#}(u_{\#},(v_{\#},\beta),\alpha)\ h(u,v_{\#}(u),\alpha) < \lambda$ в силу выбора u и условия $\alpha \in A'(u,\gamma)$.

Если же $\alpha \in A''(u,\gamma)$, то выбрав функцию $w_{\#}$ так, что $w_{\#}(\omega) \in E(u,\alpha)$, получим стратегию $(w_{\#},\delta)$, удовлетворяющую первому условию (независимо от δ). Обращаясь ко второму условию, заметим, что если стратегия $(v_{\#},\beta)$ такова, что $\beta \in A''(u,\gamma)$ и $(u_{\#}(v_{\#},\beta),v_{\#}(u_{\#}(v_{\#},\beta)) = (u^{\beta},v^{\beta})$, то $g_{\#}(u_{\#},(v_{\#},\beta)) = g(u^{\beta},v^{\beta}) \geq \gamma$. В остальных случаях $u_{\#}(v_{\#},\beta) = u$, и если $v_{\#}(u) \in E(u,\alpha)$, то в силу выбора u имеем $g_{\#}(u_{\#},(v_{\#},\beta)) = g(u,v_{\#}(u)) \geq \gamma$, а если $v_{\#}(u) \notin E(u,\alpha)$, то $h_{\#}(u_{\#},(v_{\#},\beta),\alpha)\ h(u,v_{\#}(u),\alpha) < \lambda$ по определению множества $E(u,\alpha)$.

Как уже отмечалось, в данной игре может быть много «оптимальных» стратегий Центра. Описанная выше стратегия хороша лишь тем, что ее структура имеет достаточно прозрачную содержательную интерпретацию. Описать ее можно следующим образом.

Множество A разбивается на две части. Параметрам из первой части соответствуют функции выигрыша агента, достаточно хорошо согласованные с функцией выигрыша Центра, так что существует система взаимовыгодных планов, о которых игроки могут договориться, и Центр при этом способен проконтролировать их выполнение. Для остальных значений параметров интересы игроков таковы, что Центр не может предложить агенту увеличение его выигрыша, не уменьшив существенно собственный результат. Поэтому каждый вынужден думать о себе, игнорируя интересы партнера. Управление u, существование которого устанавливается в теореме 1, можно интерпретировать как «стратегию наказания», правда, с известной натяжкой. Я склонен рассматривать отсутствие у Центра стремления, во что бы то ни стало, наказать партнера как преимущество найденного решения, поскольку на практике использование «жестких» методов можно встретить не так уж часто.

Стоит отметить, что среди рациональных (то есть удовлетворяющих условию 1 из определения гарантированного результата) ответов агента на так сформированную стратегию Центра непременно найдется такая стратегия $(w_\#,\delta)$, у которой $\delta = \alpha$, то есть агент сообщает Центру достоверную информацию о неопределенном факторе. Этому свойству в теории активных систем [11] и теории контрактов [12] уделяется большое значение (возможно, даже слишком большое).

От передачи «неверифицируемых» сообщений от агента к Центру можно отказаться без каких либо потерь в случае, когда можно выбрать такую систему взаимовыгодных планов $(u^\alpha,v^\alpha) \in H(\gamma)$, $\alpha \in A$, для которой $h(u^\alpha,v^\alpha,\alpha) = l(\alpha,\gamma)$ и для любых различных α и β из множества A либо $v^\alpha \neq v^\beta$, либо $u^\alpha = u^\beta$. Использование этого «информационного добавка», в известном смысле, «регуляризует» задачу и позволяет получить результат без каких-то дополнительных предположений.

Можно взглянуть на это с несколько иной точки зрения. По существу, выбирая сообщение β, агент выбирает из множества $\{u^\beta\colon\ \beta \in A\}$ управление, право распоряжаться которым формально принадлежит Центру. Таким образом, вводя в модель такой дополнительный обмен информацией, мы разрешаем игрокам использовать децентрализацию управления, если она взаимовыгодна. Это довольно тесно связано с принципом открытого управления из теории активных систем [11].

Особое внимание стоит обратить на функцию $l(\alpha,\gamma)$. Ее можно интерпретировать как функцию рентных платежей, то есть налогов, взимаемых за выгодные «природные условия». Смысл ее станет особенно понятен, если заметить следующее.

Рассмотрим две игры $\Gamma_\# = \langle U_\#, V_\#, A, g_\#, h_\# \rangle$ и $\Gamma_\#' = \langle U_\#, V_\#, A, g_\#, h_\# + \kappa \rangle$, где κ – произвольная функция, зависящая от α, но не зависящая от v. Тогда максимальные гарантированные результаты Центра в этих двух играх совпадают.

Действительно, пусть γ – произвольный гарантированный результат в игре $\Gamma_\#$. Тогда можно фиксировать стратегию $u_\#$ и функцию $\lambda_\#$ так, что для любого $\alpha \in A$ выполняются следующие два условия:

1. существует стратегия $(w_\#,\delta) \in V_\#$, для которой $h_\#(u_\#,(w_\#,\delta),\alpha) \geq \lambda_\#(\alpha)$ и $g_\#(u_\#,(w_\#,\delta)) \geq \gamma$;
2. для любой стратегии $(v_\#,\beta) \in V_\#$ или $g_\#(u_\#,(v_\#,\beta)) \geq \gamma$, или $h_\#(u_\#,(v_\#,\beta),\alpha) < \lambda_\#(\alpha)$.

Тогда положив $\lambda_\#'(\alpha) = \lambda(\alpha) + \kappa(\alpha)$, будем иметь: для любого $\alpha \in A$ выполняются следующие два условия:

1. существует стратегия $(w_\#,\delta) \in V_\#$, для которой $h_\#(u_\#,(w_\#,\delta),\alpha) + \kappa(\alpha) \geq \lambda_\#'(\alpha)$ и $g_\#(u_\#,(w_\#,\delta)) \geq \gamma$;
2. для любой стратегии $(v_\#,\beta) \in V_\#$ или $g_\#(u_\#,(v_\#,\beta)) \geq \gamma$, или $h_\#(u_\#,(v_\#,\beta),\alpha) + \kappa(\alpha) < \lambda_\#'(\alpha)$,

то есть γ – гарантированный результат Центра в игре $\Gamma_\#'$. Аналогично доказывается и обратное.

Поэтому сравнивать значения функции $h_\#$ при различных значениях α во многом бессмысленно (как имеет мало смысла сравнивать производителей помидоров на Южном Урале и Северном Кавказе). А поскольку Центру недоступна информация об α, он вынужден производить подобное сравнение, так как должен принять решение, «пригодное» для всех типов агентов. Функция $l(\alpha,\gamma)$ как раз и делает подобное сравнение более-менее осмысленным (заметим, что при добавлении функции $\kappa(\alpha)$ к функции выигрыша, функция $l(\alpha,\gamma)$ меняется «на ту же величину»).

Заключение

Полученные результаты вполне аналогичны результатам из [15], относящимся к игре Γ_2. Это не случайно. В определенном смысле игра Γ_3 является частным случаем игры Γ_2. Поэтому, в принципе, возможен такой путь исследования решенной в данной работе задачи: сведение ее к задаче, рассмотренной в [15], а затем конкретизация полученных результатов для рассматриваемого частного случая. Такой путь, видимо, не на много проще. Но иметь его в виду стоит.

Последовательность рассуждений при решении задачи в данном докладе несколько отличается от использованной в [15]. Можно было бы использовать и старую схему рассуждений в данном случае, а можно применить новую схему к случаю игры Γ_2. Наличие такой альтернативы может оказаться полезным при решении более сложных задач.

Для некоторых специалистов по принятию решений может оказаться непривычным язык исчисления предикатов, использованный в [13, 15]. В данном докладе я намеренно отказался от него. Использование этого искусственного языка делает рассуждения немного короче (чисто «полиграфически») а, кроме того, лучше выявляет смысл проводимых рассуждений. Но, как видно из приведенного выше решения, это все не принципиально.

В докладе используется подход к определению максимального гарантированного результата, предложенный в [13]. Можно показать, что тот же результат можно определить классической [8] формулой

$$\sup_{u_\# \in U_\#} \min_{\alpha \in A} \min_{v \in BR(u_\#,\alpha)} g_\#(u_\#, v_\#), \tag{13}$$

где

$$BR(u_\#,\alpha) = \left\{ v_\# \in V_\# : h_\#(u_\#, v_\#, \alpha) = \max_{\omega_\# \in V_\#} h_\#(u_\#, \omega_\#, \alpha) \right\}, \tag{14}$$

если максимум в этой формуле достигается и

$$BR(u_\#,\alpha) = \left\{ v_\# \in V_\# : h_\#(u_\#, v_\#, \alpha) \geq \sup_{\omega_\# \in V_\#} h_\#(u_\#, \omega_\#, \alpha) + \eta \right\} \tag{15}$$

(здесь η – фиксированное и известное Центру положительное число) в противном случае. Доказательство этого факта несложно и мало чем отличается от аналогичных доказательств в [15]. Поэтому в докладе оно не приводится.

Литература

1. *Гермейер Ю. Б.* Об играх двух лиц с фиксированной последовательностью ходов // Докл. АН СССР. Т. 198. 1971, № 5. – С. 1001-1004.
2. *Ватель И.А., Ерешко Ф.И.* Математика конфликта и сотрудничества. – М.: Знание. 1973. – 64 с.
3. *Howard N.* The theory of meta-games. // General Systems, 1966, № 11. – P. 167-186.
4. *Кукушкин Н.С.* Роль взаимной информированности сторон в играх двух лиц с непротивоположными интересами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 12. 1972, № 4. – С. 1029-1034.
5. *Кукушкин Н.С., Морозов В.В.* Теория неантагонистических игр. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 104 с.
6. *Алиев В. С., Кононенко А. Ф.* Многошаговые игры двух лиц с фиксированной последовательностью ходов при агрегированной информации о выборе партнера // Автоматика и телемеханика, 2005, № 2, – С. 108-114.
7. *Кононенко А.Ф.* Роль информации о функции цели противника в играх двух лиц с фиксированной последовательностью ходов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 13. 1973, №2. – С. 311-317.
8. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. – М.: Наука, 1976. – 327 с.
9. *Горелик В.А., Кононенко А.Ф.* Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. – М.: Радио и связь, 1982. – 145 с.
10. *Кононенко А.Ф., Халезов А.Д., Чумаков В.В.* Принятие решений в условиях неопределенности. – М.: ВЦ АН СССР, 1991. – 196 с.
11. *Бурков В.Н, Еналеев А. К., Коргин Н. А.* Согласованность и неманипулируемость механизмов организационного управления: текущее состояние проблемы, ретроспектива, перспективы развития теоретических исследований // Автоматика и телемеханика, 2021, № 7. – С. 5-37.
12. *Bolton P., Dewatripont M.* Contract Theory. – Cambridge: The MIT Press, 2005. – 724 p.
13. *Горелов М.А.* Максимальный гарантированный результат в иерархических играх // Управление большими системами. Вып. 67. М.: ИПУ РАН, 2017. – С. 4-31.
14. *Berge C.* Espaces topologiques. Functions multivoques. – Paris: Dunod, 1959. – 272 p.
15. *Горелов М.А.* Иерархические игры с неопределенными факторами // Управление большими системами. Вып. 59. М.: ИПУ РАН, 2016. – С. 6-22.