DOI: 10.25728/mlsd.2022.0516

ОБ АЛГОРИТМЕ ИСКЛЮЧЕНИЯ СЛАБЫХ НЕРАВЕНСТВ В ПРОЦЕДУРЕ СВЕРТЫВАНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Лукацкий А.М.

Институт энергетических исследований РАН,

Россия, г. Москва ул. Нагорная д.31, кор. 2

lukatskii.a.m.math@mail.ru, macrolab@eriras.ru

Аннотация: Рассматривается процедура чистки слабых неравенств в алгоритме Фурье-Черникова свертывания системы линейных неравенств. Предлагается алгоритм идентификации всех слабых неравенств системы, основанный на методе Гаусса решения систем линейных уравнений. Алгоритм требует полиномиальное число операций. Он обобщается на системы неравенств, задаваемых полилинейными функциями.

Ключевые слова: линейные неравенства, метод ортогональных проекций, процедура свертывания, слабые неравенства, правила Черникова, метод Гаусса.

Введение

Метод ортогональных проекций, называемый также методом исключения Фурье-Моцкина [1], неоднократно применялся при решении систем линейных неравенств в крупномасштабных системах, относящихся к различным предметным областям. Здесь можно привести в качестве примеров

- *Комитетные конструкции, связанные с разрешением изначально несовместных систем ограничений [2],*
- *Задачи многокритериальной оптимизации с поиском компромиссной точки, связанные с методом достижимых целей [3],*
- *Казуальные модели со скрытыми переменными, возникающие в различных физических задачах [4].*

Метод основан на последовательном исключении переменных. Он позволяет получить все множество решений системы линейных неравенств [5–6], и с этой точки зрения имеет ряд преимуществ в сравнении с симплекс-методом, позволяющим получить точечные решения. Основным недостатком метода является высокая (факториальная) степень разрастания системы линейных неравенств в процессе исключения переменных. В этой связи весьма актуальными становятся различные методы исключения слабых неравенств после очередного шага исключения переменных. Черниковым были предложены два правила исключения слабых неравенств. Правила Черникова оперируют с комбинаторными характеристиками вновь образуемых неравенств, выражающимися в понятии индекса, и никак не учитывают метрику системы неравенств [7].

В [6, 8] предложен алгоритм полного исключения слабых неравенств, основанных на использовании симплекс-алгоритма. Этот алгоритм выявил, в частности, что правила Черникова могут исключать далеко не все слабые неравенства системы. Однако чистка слабых неравенств с использованием симплекс-метода имеет тот недостаток, что симплекс-алгоритм может требовать количества операций, которое растет экспоненциально в зависимости от размерности системы неравенств [9]. В монографии Черникова [1] также предложен алгоритм чистки всех слабых неравенств, но и он имеет показательную оценку числа операций.

Ниже предложен алгоритм чистки слабых неравенств, формируемых на каждом шаге алгоритма свертывания, который имеет полиномиальную оценку числа операций.

1 Процесс образования новых неравенств по ходу алгоритма свертывания системы линейных неравенств

Пусть дана система линейных неравенств

$$\begin{aligned} & u_1^1 x_1 + \ldots + u_1^n x_n + b_1 \geq 0 \\ & \ldots \\ & u_m^1 x_1 + \ldots + u_m^n x_n + b_m \geq 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Рассмотрим формирование очередного индекса в процедуре свертывания системы линейных неравенств. Пусть на очередном этапе процедуры исключаются первые s переменных системы (1).

Обозначим $\bar{u}_k = (u_k^1, \ldots, u_k^n), k = 1, \ldots, m.$

Очередное неравенство, образованное в рамках шага процедуры свертывания (сплетения) имеет вид

$$\overline{w} = a_{i1}\overline{u}_{i1} + \ldots + a_{ik}\overline{u}_{ik} \ , a_{ik} > 0. \qquad (2)$$

Здесь существенно, что все коэффициенты a_{ij} положительны.

Этому шагу (сплетению) соответствует индекс

$$(i_1, \ldots, i_k). \qquad (3)$$

Назовем $k = l(\overline{w})$, длиной индекса неравенства (2).

Условие исключения первых *s*переменных системы линейных неравенств записывается в виде системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} u_{i1}^1 a_{i1} + \ldots + u_{ik}^1 a_{ik} &= 0 \\ \ldots \\ u_{i1}^s a_{i1} + \ldots + u_{ik}^s a_{ik} &= 0 \\ a_{i1} + \ldots + a_{ik} &= 1 \end{aligned} \qquad (4)$$

Последнее уравнение нормализует коэффициенты, чтобы избежать бессодержательной неоднозначности в представлении сплетения.

Следуя Черникову [1], скажем, что неравенство (2) сократимо, если оно может быть представлено в виде

$$\overline{w} = \lambda \overline{p} + \mu \overline{q},$$

где $\lambda, \mu > 0$, а $\overline{p}, \overline{q}$ – неравенства вида (2), удовлетворяющие системе (4) и имеющие индексы меньшей длины, чем $\overline{w}$, в противном случае назовем неравенство несократимым.

С точки зрения процесса чистки системы от слабых неравенств, сократимые неравенства имеет смысл удалять из системы, получающейся на *s*-том шаге исключения переменных (очередном сплетении).

Утверждение 1. Пусть для неравенства (2) система (4) имеет неединственное решение. Тогда неравенство (2) сократимо.

Доказательство. Построим систему в приращениях для (4).

$$\begin{aligned} u_{i1}^1 b_{i1} + \ldots + u_{ik}^1 b_{ik} &= 0 \\ \ldots \\ u_{i1}^s b_{i1} + \ldots + u_{ik}^s b_{ik} &= 0 \\ b_{i1} + \ldots + b_{ik} &= 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

Если система (4) имеет неединственное решение, система (5) должна иметь ненулевое решение, в котором имеются как положительные, так и отрицательные компоненты. Положим

$$t^+ = \min_{b_{ij}<0} a_{ij}/(-b_{ij}), \ t^- = \min_{b_{ij}>0} a_{ij}/b_{ij} \qquad (6)$$

и обозначим индексы, на которых достигаются эти минимумы, через

$$ij_+, \ ij_-. \qquad (7)$$

Положим

$$p_{ij} = a_{ij} + t^+ b_{ij} \ , q_{ij} = a_{ij} - t^- b_{ij}. \qquad (8)$$

Покажем, что

$$p_{ij} \geq 0, q_{ij} \geq 0.$$

Для отрицательных b_{ij} имеем

$$t^+ \leq a_{ij}/(-b_{ij}),$$

откуда

$$a_{ij} + t^{+}b_{ij} \geq 0.$$

Для положительных b_{ij} имеем

$$t^{-} \leq a_{ij} / b_{ij} \ ,$$

откуда

$$a_{ij} - t^{-}b_{ij} \geq 0.$$

Кроме того, при подстановке индексов (7) достижения минимумов в (6) получаем

$$p_{ij+} = a_{ij+} + (a_{ij+} / (-b_{ij+}))b_{ij+} = 0 \ ,$$
$$q_{ij-} = a_{ij-} - (a_{ij-} / b_{ij-})b_{ij-} = 0. \qquad (9)$$

Введем положительные коэффициенты

$$\lambda = \frac{t_{-}}{t_{-} + t_{+}}, \ \mu = \frac{t_{+}}{t_{-} + t_{+}}.$$

Имеем

$$\overline{w} = \lambda \, \overline{p} + \mu \overline{q} \, , \ \lambda + \mu = 1. \qquad (10)$$

Так как $\{b_{ij}\}$ являются решением системы в приращениях (5), то $\overline{p}$ и $\overline{q}$ являются решениями системы (4). Из (9)и (10) имеем $l(\overline{p}) \leq l(\overline{w}) - 1, \ l(\overline{q}) \leq l(\overline{w}) - 1.$

Утверждение доказано.

Примечание. Система уравнений (5) может быть решена методом Гаусса. Метод Гаусса требует k^3 операций, где k – количество переменных в системе, [10]. Применительно к процедуре свертывания систем линейных неравенств, k – это длина индекса для очередного неравенства, образованного на шаге сплетения в процессе свертывания системы неравенств. Поскольку, согласно 1ПЧ, в формировании участвуют индексы длины не более, чем s+1, общее количество операций можно оценить величиной $(s+1)^3$.

Покажем, что правила Черникова могут быть выведены в качестве следствий из утверждения 1.

1-ое правило Черникова (1ПЧ). Пусть для неравенства (2) и системы (4) имеем $k > s+1$. Тогда неравенство (2) разложимое.

Действительно, в этом случае у системы (5) количество уравнений больше количества неизвестных, а значит, имеется ненулевое решение.

2-ое правило Черникова (2ПЧ). Пусть для неравенства вида (2) $\overline{w} = a_{i1}\,\overline{u}_{i1} + \ldots + a_{ik}\,\overline{u}_{ik}$ существует неравенство $\overline{o} = r_{t1}\,\overline{u}_{i1} + \ldots + r_{tl}\,\overline{u}_{il}$ такое, что индекс $\overline{w}$ охватывает индекс $\overline{o}$ и дополненное по индексу нулями $\overline{o}$ является решением системы (4). Тогда неравенство $\overline{w}$ разложимое. Действительно, в этом случае система (4), образованная в процессе сплетения, имеет неединственное решение.

Если не образовывать посредством сплетения индексы, длина которых подпадает под 1-ое правило Черникова, а также удалить индексы, удовлетворяющие 2-м правилу Черникова, то возможна ситуация, когда система (4) для всех оставшихся индексов будет иметь единственное решение, т.е. все оставшиеся от очередного сплетения неравенства несократимы. Это соответствует утверждению Черникова, что при сплетении системы из линейно независимых функционалов правила Черникова выделяют все слабые неравенства системы. Заметим, что при наличии в системе двусторонних диапазонных ограничений вида

$$a_i \leq x_i \leq b_i \, , \qquad (11)$$

такой случай не может реализоваться, так как каждое диапазонное ограничение (11) при формировании системы для процедуры свертывания преобразуется в два

$$x_i - a_i \geq 0 \ ;$$
$$-x_i + b_i \geq 0,$$

что приводит к линейной зависимости функционалов, образующих систему.

2 Алгебраический вариант процедуры свертывания

Здесь мы дадим обобщение процедуры свертывания на случай систем полилинейных неравенств, рассмотренных в [11]. Будем рассматривать системы неравенств вида (1), в которых вместо координатных функций стоят различные полилинейные мономы, зависящие от исходных координат $x_1,\ldots,x_n$. Для таких неравенств удобной оказывается табличная форма представления полилинейных функций, предложенная в [11]. Заметим, что утверждение 1 переносится на такие системы.

На примере системы полилинейных неравенств, описанной в [11] (смотрите таблицы 3–5), использующей 36 мономов, проведена процедура их алгебраического свертывания до полного исключения мономов. Ход работы процедуры иллюстрируется в таблице 1.

Таблица 1.

№ итерации	Время запуска итерации	Код исключаемого монома	Количество неравенств на входе	Образовано по Фурье (не образовано по 1ПЧ)	Исключено по 2ПЧ	Исключено дополни-тельной чисткой
1	12:26:06	mon3	41	40{0}	0	2
2	12:26:06	mon1	40	39{0}	0	2
3	12:26:06	mon2	39	38{0}	0	2
4	12:26:06	mon4	37	36{0}	0	0
5	12:26:07	mon5	37	36{0}	0	1
6	12:26:07	mon6	36	35{0}	0	1
7	12:26:07	mon7	35	34{0}	0	1
8	12:26:07	mon8	34	33{0}	0	1
9	12:26:07	mon9	33	32{0}	0	1
10	12:26:07	mon10	32	31{0}	0	1
11	12:26:07	mon11	31	30{0}	0	1
12	12:26:07	mon12	30	29{0}	0	1
13	12:26:07	non13	29	28{0}	0	2
14	12:26:07	mon14	27	26{0}	0	2
15	12:26:07	mon15	25	24{0}	0	1
16	12:26:07	mon16	24	23{0}	0	1
17	12:26:08	mon17	23	22{0}	0	1
18	12:26:08	mon18	22	21{0}	0	2
19	12:26:08	mon19	20	19{0}	0	1
20	12:26:08	mon20	19	18{0}	0	1
21	12:26:08	mon21	18	17{0}	0	1
22	12:26:08	mon22	17	16{0}	0	1
23	12:26:08	mon23	16	15{0}	0	1
24	12:26:08	mon24	15	14{0}	0	1
25	12:26:08	mon25	14	13{0}	0	1
26	12:26:08	mon26	13	12{0}	0	1
27	12:26:08	mon27	12	11{0}	0	1
28	12:26:08	mon28	11	10{0}	0	1
29	12:26:08	mon29	10	9{0}	0	1
30	12:26:08	mon30	9	8{0}	0	1
31	12:26:09	mon31	8	7{0}	0	1
32	12:26:09	mon32	7	6{0}	0	1
33	12:26:09	mon33	6	5{0}	0	1
34	12:26:09	mon34	5	4{0}	0	2
35	12:26:09	mon35	3	2{0}	0	1

Мы видим, что для этой модели процедура полного свертывания проходит сравнительно легко и даже не обращается к правилам Черникова.

Для системы полилинейных неравенств общего положения с тем же набором мономов ход процедуры полного свертывания приводится в таблице 2.

Таблица 2.

№ итерации	Время запуска итерации	Код исключаемого монома	Количество неравенств на входе	Образовано по Фурье (не образовано по 1ПЧ)	Исключено по 2ПЧ	Исключено дополни-тельной чисткой
1	12:03:04	mon4	57	66{0}	0	4
2	12:03:05	mon6	63	76{0}	0	6
3	12:03:07	mon2	71	98{0}	0	10
4	12:03:13	mon3	89	153{90}	5	46
5	12:03:23	mon1	103	197{130}	7	73
6	12:03:29	mon9	118	172{812}	12	29
7	12:03:58	mon5	132	314{1185}	6	69
8	12:04:31	mon7	240	333{7167}	4	39
9	12:06:05	mon8	291	530{13660}	11	96
10	12:08:10	mon14	424	599{27397}	11	133
11	12:10:18	mon20	456	608{30747}	6	77
12	12:12:45	mon26	526	670{37855}	7	84
13	12:14:53	mon11	580	624{34839}	4	39
14	12:17:22	mon32	582	687{36911}	0	192
15	12:18:37	mon35	496	509{4848}	0	244
16	12:18:55	mon17	266	269{3131}	0	77
17	12:19:06	mon29	193	219{3540}	0	84
18	12:19:10	mon23	136	145{1394}	0	62
19	12:19:13	mon12	84	113{690}	9	33
20	12:19:14	mon18	72	86{441}	3	12
21	12:19:15	mon24	72	81{438}	1	8
22	12:19:17	mon15	73	82{455}	1	10
23	12:19:18	mon30	72	81{455}	3	13
24	12:19:19	mon36	66	69{260}	0	16
25	12:19:20	mon33	54	57{100}	0	14
26	12:19:20	mon21	44	47{100}	0	13
27	12:19:21	mon27	35	38{38}	0	14
28	12:19:22	mon13	25	53{25}	8	26
29	12:19:22	mon19	20	25{22}	2	11
30	12:19:22	mon16	13	12{6}	0	1
31	12:19:23	mon22	12	11{6}	0	3
32	12:19:23	mon28	9	8{2}	0	4
33	12:19:23	mon10	5	4{0}	0	1
34	12:19:23	mon25	4	3{0}	0	1
35	12:19:23	mon31	3	2{0}	0	1

Заключение

Предложен алгоритм полной чистки системы линейных неравенств на слабость. Алгоритм применим к системам неравенств специального вида, получаемых после каждого шага процедуры свертывания системы линейных неравенств. Анализ каждого проверяемого неравенства на слабость сводится к анализу специально формируемой системы линейных уравнений на неединственность решения, что можно провести, например, методом Гаусса, являющимся полиномиальным алгоритмом с вычислительной емкостью порядка $(n+1)^3$ от количества n переменных в системе.

Таким образом, получается преимущество в сравнении с чисткой слабых неравенств с использованием симплекс-алгоритма, или алгоритма Черникова общего анализа неравенств на слабость, приводящими к экспоненциальному росту числа операций от количества $m + n$, где m – количество неравенств в системе. Если учесть, что основным недостатком метода свертывания, является разрастание системы неравенств по шагам процедуры свертывания, предложенный алгоритм чистки слабых неравенств расширяет возможности применения метода свертывания в реальных задачах.

Предложенную методологию удается распространить на системы полилинейных неравенств.

Литература

1. *Черников С.Н.* Линейные неравенства. – М.: Наука, 1968. – 488с.
2. *Мазуров В.Д., Хачай М.Ю.* Комитетные конструкции // Известия УрГУ. 1999, № 14.– С. 77–108.
3. *Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К., Черных О.Л.* Компьютер в поисках компромисса. Метод достижимых целей. Российская академия наук. Серия — Кибернетика: неограниченные возможности и возможные ограничения.– М.: Наука, 1997. – 243 с.
4. *Wolfe E., Spekkens R.W., Fritz T.* The Inflation Technique for Causal Inference with Latent Variables. Max-Planck-Institutf¨ ur Mathematik in den Naturwissenschaften Leipzig Preprint. 2016, no.: 59. – 44 p.
5. *Лукацкий А.М., Шапот Д.В.* Конструктивный алгоритм свертывания систем линейных неравенств высокой размерности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 7. – С. 1167–1180.
6. *Shapot D.V., Lukatskii A.M.* Solution Building for Arbitrary System of Linear Inequalities in an Explicit Form// American Journal of Computational Mathematics. 2012, Vol. 2, No. 1. – P. 1–11. doi: 10.4236/ajcm.2012.21001.
7. *Бастраков С.И., Золотых Н.Ю.* Быстрый способ проверки правила Черникова в методе исключения Фурье–Моцкина // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015, том 55, номер 1. – С. 165–172.
8. *Шапот Д.В., Лукацкий А. М.* Метод ортогональных проекций выпуклых многогранников (свертка системы линейных неравенств) LinConstrains. Свидетельство государственной регистрации программы для ЭВМ №2016617152. Заявка № 2026614442. Дата поступления 04 мая 2016 г. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 28 июня 2016 г.
9. *Roos C.* An exponential example for Terlaky's pivoting rule for the criss - cross simplex method// Math Program., 1990, 46. – P. 78–94.
10. *Press W.H, Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P.* Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing. Third Edition. – Cambridge University Press, 2007. – P. 47–48.
11. *Лукацкий А.М.* Программный комплекс генерации задачи полилинейного программирования. Управление развитием крупномасштабных систем MLSD’2021. Труды четырнадцатой международной конференции, М.: ИПУ РАН, 2021. – С. 506–512.