DOI: 10.25728/mlsd.2022.0537

МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ С ТРУДОВЫМИ РЕСУРСАМИ

Сытов А.Н., Байрамов О.Б.о.
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,
Россия, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2
an-sytov@yandex.ru, orudzh_bayramov@mail.ru

Аннотация: Изложен вариант модели экономической системы, которую можно рассматривать, как обобщение модели Эрроу-Дебре на случай динамики. Используются приёмы описания по развитию оптимального предприятия с учётом динамики материальных продуктов и финансовых показателей. Приводится запись многокритериальной задачи и процедуры согласования интересов отраслей.

Ключевые слова: модели производства, потребления, труда, процедуры согласования.

Введение

Модель Эрроу-Дебре представляет пример построения ценового механизма, обеспечивающего конкурентное равновесие спроса и предложения в экономической системе в статическом случае. Модель и доказательство теоремы о существования равновесия создали фундаментальные основания для математической экономики. Представляет интерес обобщение модели данного типа на случай динамики, более подробное описание динамики трудовых ресурсов с учётом повышения их квалификации при наличии образовательных центров, что позволит рассмотреть спектр механизмов управления экономическими системами.

Работа посвящена этим вопросам.

Вопросы образования приобретают абсолютно первостепенное значение.

Глобальный рынок образования – около 300$ млрд. в 2021 г., 600$ млрд. в 2027 г. В России – около 300 млрд. руб. в 2022 г., около 700 млрд. руб. в 2025 г.

В упрощенном изложении время работы всех индивидуумов на каждом шаге считается постоянной величиной и не зависит от того, обучается ли он помимо основной работы или нет. Также считается, что время, которое индивидуум затрачивает на обучение не зависит от номера шага и не зависит от того работает ли он или нет.

Введём следующие обозначения:

Совокупность производителей $i = 1,...,\bar{I}$,

Технологические способы производства $j = 1,...,\bar{J}$

Совокупность всех потребителей $k = 1,...,\bar{K}$,

Специальности $r = 1,...,\bar{R}$,

Квалификации (трудовые разряды) $q = 1,...,\bar{Q}_r$,

$c_i^p(t)$ – цена одной единицы i-го продукта,

$c_{r,q}^w(t)$ – оплата труда индивидуума специальности r и квалификации q;

$c_{r,q}^d(t)$ – плата за обучение одного индивидуума специальности r и квалификации q.

1 Подсистема Производства

Производитель выпускает $\bar{I}$ продуктов. Для выпуска каждого продукта ему требуется труд разной специальности и квалификации. Производитель может направлять часть своих сотрудников на курсы повышения квалификации.

Обозначим через $\theta_{r,q}^d$ число шагов, которое занимает процесс повышения квалификации сотрудника специальности r на один разряд с q до $q+1$.

Следующие переменные составляют управление производителя:

$x_{r,q}^{p,w}(t)$ – контролируемое производителем изменение численности сотрудников специальности r и квалификации q,

$x_{r,q}^{p,d}(t)$ – количество сотрудников, которых предприятие направляет на курсы повышения квалификации,

$y_i^p(t)$ – выпуск продукта i, $u_j(t)$ – интенсивность технологии *j*.

Фазовые переменные производителя:

$X_{r,q}^{p,w}(t)$ – численность сотрудников только занятых на производстве,

$X_{r,q}^{p,d}(t)$ – численность сотрудников, находящихся на курсах повышения квалификации,

$M^p(t)$ – касса производителя.

Динамика фазовых переменных с заданными начальными условиями:

$$X_{r,q}^{p,w}(t+1) = X_{r,q}^{p,w}(t) + x_{r,q}^{p,w}(t) + x_{r,q-1}^{p,d}\left(t-\theta_{r,q-1}^{d}+1\right) - x_{r,q}^{p,d}(t), \quad (1)$$

$$X_{r,q}^{p,d}(t+1) = X_{r,q}^{p,d}(t) + x_{r,q}^{p,d}(t) - x_{r,q}^{p,d}\left(t-\theta_{r,q}^{d}+1\right), \quad (2)$$

$$M^p(t+1) = M^p(t) + \Phi_k^{p,p}(t) - \Phi_k^{p,w}(t) - \Phi_k^{p,d}(t), \quad (3)$$

$$t = 1,\dots,T.$$

$$X_{r,q}^{p,w}(1) = \tilde{X}_{r,q}^{p,w},\ X_{r,q}^{p,d}(1) = \tilde{X}_{r,q}^{p,d},\ M^p(1) = \tilde{M}. \quad (4)$$

Также считаются заданной численность сотрудников разной специальности и квалификации, направленных предприятием на курсы повышения квалификации до начала планового периода, но обучение которых заканчивается непосредственно на некотором шаге планового периода $\tilde{x}_{r,q}^{p,d}(t)$, $t = 2-\theta_{r,q}^{d},\dots,0$.

Суммарное количество всех сотрудников производителя:

$$X_{r,q}^{p}(t) = X_{r,q}^{p,w}(t) + X_{r,q}^{p,d}(t). \quad (5)$$

В фазовое уравнение для кассы производителя входят $\Phi_k^{p,p}(t)$ – оплата реализованных на рынке продуктов на шаге t, $\Phi_k^{p,w}(t)$ – заработная плата персонала производителя, $\Phi_k^{p,d}(t)$ – оплата за обучение сотрудников, направленных на курсы повышения квалификации.

С учетом введенных выше обозначений представим эти переменные в следующем виде:

$$\Phi_k^{p,p}(t) = \sum_{i=1}^{\bar{I}} c_i^p(t)\, y_i^p, \quad (6)$$

$$\Phi_k^{p,w}(t) = \sum_{r=1}^{\bar{R}} \sum_{q=1}^{\bar{Q}_r} c_{r,q}^{w}(t)\, X_{r,q}^{p}(t), \quad (7)$$

$$\Phi_k^{p,d}(t) = \sum_{r=1}^{\bar{R}} \sum_{q=1}^{\bar{Q}_r} c_{r,q}^{d}(t)\, X_{r,q}^{p,d}(t). \quad (8)$$

Ограничения на управление и фазовые переменные:

$$x_{r,q}^{p,d}(t) \ge 0,\ t = 1,\dots,T; \quad (9)$$

$$X_{r,q}^{p,w}(t) \ge 0,\ M^p(t) \ge 0,\ t = 2,\dots,T+1. \quad (10)$$

Производственные соотношения представляются собой дополнительные ограничения на управление и фазовые ограничения смешанного типа.

Выпуск продукции:

$$y_i^p(t) = \sum_{j=1}^{\bar{J}} a_{i,j}^{p}(t)\, v_j(t),\ t = 1,\dots,T. \quad (11)$$

Ресурсные ограничения по труду:

$$\sum_{j=1}^{\bar{J}} b_{r,q,j}^{p}(t) \cdot v_j(t) \le X_{r,q}^{p}(t),\ t = 1,\dots,T. \quad (12)$$

Здесь $a_{i,j}^{p}\left(t\right)$ – удельные коэффициенты выпуска продукта i с помощью технологии j; $b_{r,q,j}^{p}\left(t\right)$ – удельные коэффициенты трудозатрат, т.е. какое количество сотрудников специальности r и квалификации q требуется на шаге t при единичной интенсивности технологии j.

Интенсивность технологии j на каждом шаге выбирается так, чтобы $0 \le v_j\left(t\right) \le \bar{v}_j\left(t\right)$.

Критерий производителя – касса в конце планового периода $M^{p}\left(T+1\right)$.

В результате решения задачи $M^{p}\left(T+1\right) \to \max$ находятся оптимальное управление и оптимальные значения фазовых переменных производителя:

$$\hat{x}_{r,q}^{p,w}\left(t\right),\ \hat{x}_{r,q}^{p,d}\left(t\right),\ \hat{y}_{i}^{p}\left(t\right),\ \bar{v}_j\left(t\right),\ t=1,\dots,T$$

$$\hat{X}_{r,q}^{p,w}\left(t\right),\ \hat{X}_{r,q}^{p,d}\left(t\right),\ \hat{M}^{p}\left(t\right),\ t=2,\dots,T+1$$

$$r=1,\dots,\bar{R},\ q=1,\dots,\bar{Q}_r,\ i=1,\dots,\bar{I},\ j=1,\dots,\bar{J}$$

2 Подсистема Потребления

Будем считать, что каждый индивидуум (участник, домашнее хозяйство, потребитель) обладает одной специальностью и некоторой начальной квалификацией, которую он может со временем повышать, затрачивая на это некоторое время и деньги. Потребитель не обладает начальными запасами продуктов и не накапливает их в процесс жизнедеятельности. На каждом шаге он покупает на рынке продукты производителей, полностью потребляет их и от этого получает некоторую полезность. Одношаговая полезность может зависеть от выбора потребителя – решения работать на данном шаге или(и) учиться. Отметим, что эти решения не являются взаимно исключающими, т.е. он может как и работать, так и учиться одновременно.

Рассмотрим k-го потребителя, обладающего специальностью s_k. Считается известной его начальная квалификации $\tilde{Q}_k$ и номер шага $t_{k,0}^{d}$, предшествующий началу планового периода, на котором он принял последнее решение о повышении квалификации. Обозначим через $\theta_k^{d}\left(q\right)$ продолжительность процесса повышения квалификации потребителя k с разряда q до $q+1$. В течение планового периода, потребитель принимает решение о повышение квалификации на шагах $t_{k,1}^{d},\dots,t_{k,L}^{d}$. Число таких шагов L, вообще говоря, не фиксировано. Если потребитель принимает решение о повышении квалификации на шаге $t_{k,l}^{d}$ и к началу этого шага его квалификация составляла q разрядов, то соответствующий процесс обучения закончится на шаге $t_{k,l}^{d}+\theta_k^{d}\left(q\right)-1$, и на начало следующего она уже будет равна $q+1$.

Пусть $Q_k\left(t\right)$ – квалификация потребителя на начало шага t. Использую обозначение $Q_k\left(t_{k,l}^{d}\right)=Q_{k,l}$, запишем изменение значения этой переменной во времени следующим образом:

$$Q_k\left(t+1\right)=Q_k\left(t\right)+\delta_k\left(t\right),\ t=t_{k,0}^{d},\dots,T, \tag{13}$$

$$Q_k\left(t_{k,0}\right)=\tilde{Q}_k,$$

где $\delta_k\left(t\right)=1$, $t=t_{k,l}^{d}+\theta_k^{d}\left(Q_{k,l}\right)-1$; $\delta_k\left(t\right)=0$, $t \ne t_{k,l}+\theta_k^{d}\left(Q_{k,l}\right)-1$ и индекс l пробегает значения от 0 до L.

Ограничения на управления потребителя представляют собой следующие естественные условия на соответствующие моменты “переключения” режимов его деятельности:

$t_{k,l}^{d} \ge t_{k,l-1}^{d}+\theta_k^{d}\left(Q_{k,l}\right)$, $l=1,\dots,L$, $t_{k,L}^{d} \le T$.

Условие ограниченности разрядной сетки квалификации труда обязуют ввести нас следующее терминальное фазовое ограничение:

$$Q_k\left(T+1\right) \le \bar{Q}_{s_k} \tag{14}$$

Пусть $y_k^{c,w}(t)$ – управляющая переменная потребителя, равная единице на шаге t, когда потребитель выбирает трудовую деятельность и нулю в остальные моменты времени. Введем также вспомогательную индикаторную переменную $x_k^{c,d}(t)$, равную единице, если потребитель на шаге t занят обучением и нулю в противном случае. Ее значения полностью определяются управляющими параметрами $t_{k,1}^d,\ldots,t_{k,L}^d$:

$$x_k^{c,d}(t)=1,\ t=t_{k,l}^d,...,t_{k,l}^d+\theta_k\left(Q_{k,l}\right)-1,\ l=0,...,L\ ,\ t=1,...,T\ .$$

$$x_k^{c,d}(t)=0\ ,\ t=t_{k,l-1}^d+\theta_k\left(Q_{k,l-1}\right),...,t_{k,l}^d-1,\ l=1,...,L\ ,\ t=1,...,T\ .$$

Обозначим через $\Phi_k^{c,w}(t)$, $\Phi_k^{c,p}(t)$, $\Phi_k^{c,d}(t)$ зарплату потребителя k на шаге t, оплату потребляемых им продуктов и плату за обучение, соответственно.

С учетом введенных ранее обозначений:

$$\Phi_k^{c,w}(t)=c_{s_k}^w\left(t,Q_k(t)\right)y_k^{c,w}(t), \tag{15}$$

$$\Phi_k^{c,p}(t)=\sum_{i=1}^{\bar{I}}c_i^p(t)\,x_{k,i}^{c,p}\ , \tag{16}$$

$$\Phi_k^{c,d}(t)=c_{s_k}^d\left(t,Q_k(t)\right)x_k^{c,d}(t). \tag{17}$$

Изменение наличных денежных средств потребителя $M_k^c(t)$ от времени описывается следующим конечно-разностным уравнением:

$$M_k^c(t+1)=M_k^c(t)+\Phi_k^{c,w}(t)-\Phi_k^{c,p}(t)-\Phi_k^{c,d}(t),\ t=1,...,T+1, \tag{18}$$

с начальным условием $M_k^c(t)=\tilde{M}_k^c$.

Естественно считать, что касса потребителя в моменты $t=2,...,T+1$ должна удовлетворять фазовому ограничению $M_k^c(t)\geq 0$.

Введем одношаговую полезность потребителя $u_k^c(t)=u_k\left(t,x_{k,1}^{c,p}(t),...,x_{k,\bar{I}}^{c,p}(t),y_k^{c,w}(t),x_k^{c,d}(t)\right)$, $t=1,...,T$.

Будем считать, что она зависит и от вида его текущей деятельности, что отражается включением в соответствующую функцию аргументов $y_k^{c,w}(t)$, $x_k^{c,d}(t)$.

Критерием потребителя будет

$$U_k^c=\sum_{t=1}^{T}\beta^t\,u_k^c(t)+\beta^T\cdot M_k^c(T+1), \tag{19}$$

где первое слагаемое представляет собой суммарную полезность, которую он получает в процессе всей жизнедеятельности на интервале $1,...,T$, выраженная в виде суммы приведенных к началу первого шага “мгновенных” полезностей с некоторым коэффициентом β, а второе слагаемое – приведенный конечный капитал.

Потребитель решает задачу

$$U_k^c\to\max\ .$$

В результате чего находятся оптимальные значения его управляющих и фазовых переменных:

$$\hat{L}\ ,\ \hat{t}_{k,1}^d,\ldots,\hat{t}_{k,\hat{L}}^d\ ,$$

$$\hat{x}_{k,i}^{c,p}(t),\ i=1,...,\bar{I}\ ;\ \hat{y}_k^{c,w}(t),\ \hat{x}_k^{c,d}(t),\ t=1,...,T$$

$$\hat{Q}_k(t),\ \hat{M}_k^c(t),\ t=2,...,T+1.$$

3 Учебный центр

Учебный центр предлагает услуги по обучению сотрудников предприятия и индивидуумов. В качестве фазовых переменных учебного центра мы выбираем: $X_{r,q}^{e,w}(t)$ – количество обучающих сотрудников, $X_{r,q}^{e,d}(t)$ – количество учащихся и $M^e(t)$ – касса. Введем управляющие переменные: $x_{r,q}^{e,w}(t)$ – изменение численности персонала учебного центра, $y_{r,q}^{e,d}(t)$ – количество участников специальности r и квалификации q, которых учебный центр принимает на обучение.

Запишем фазовые уравнения:

$$X_{r,q}^{e,w}(t+1) = X_{r,q}^{e,w}(t) + x_{r,q}^{e,w}(t), \tag{20}$$

$$X_{r,q}^{e,d}(t+1) = X_{r,q}^{e,d}(t) + y_{r,q}^{e,d}(t) - y_{r,q}^{e,d}\left(t - \theta_{r,q}^{d} + 1\right) \tag{21}$$

$$M^e(t+1) = M^e(t) + \Phi^{e,d}(t) - \Phi^{e,w}(t), \tag{22}$$

$$X_{r,q}^{e,d}(1) = \tilde{X}_{r,q}^{e,d}(t), \tag{23}$$

где $t = 1,...,T$ и считаются заданными начальные значения фазовых переменных

$$X_{r,q}^{e,w}(1) = \tilde{X}_{r,q}^{e,w},\ X_{r,q}^{e,d}(1) = \tilde{X}_{r,q}^{e,d}(t),\ M^e(1) = \tilde{M}^e.$$

Как и для задачи производителя зададим также количество индивидуумов разных специальностей и квалификации принятых для обучения до начала планового периода, но обучение которых заканчивается непосредственно на некотором шаге планового периода $\tilde{y}_{r,q}^{e,d}(t)$, $t = 2 - \theta_{r,q}^{d},...,0$.

В фазовое уравнение для кассы входят $\Phi_k^{e,d}(t)$ – оплата за обучение учащихся на шаге t и $\Phi_k^{e,w}(t)$ – заработная плата сотрудников учебного центра. Запишем следующие формальные выражения для этих переменных:

$$\Phi_k^{e,d}(t) = \sum_{r=1}^{\bar{R}} \sum_{q=1}^{\bar{Q}_r} c_{r,q}^{d}(t)\, X_{r,q}^{e,d}(t), \tag{24}$$

$$\Phi_k^{e,w}(t) = \sum_{r=1}^{\bar{R}} \sum_{q=1}^{\bar{Q}_r} c_{r,q}^{w}(t)\, X_{r,q}^{e,w}(t). \tag{25}$$

Естественно считать, что должны быть справедливы следующие ограничения на управление и фазовые переменные:

$$y_{r,q}^{e,d}(t) \geq 0,\ t = 1,...,T\ ;$$

$$X_{r,q}^{e,w}(t) \geq 0,\ X_{r,q}^{e,d}(t) \geq 0,\ M(t) \geq 0,\ t = 2,...,T+1.$$

Будем считать также, что при $t = 2,...,T+1$, должны выполняться ресурсные ограничения учебного центра, которые представляют собой дополнительные, к приведенным выше, фазовые ограничения:

$$\sum_{r=1}^{\bar{R}} \sum_{q=1}^{\bar{Q}_r} b_{r,q,r',q'}^{e}(t)\, X_{r',q'}^{e,d}(t) \leq X_{r,q}^{e,w}(t). \tag{26}$$

Здесь коэффициенты $b_{r,q,r',q'}^{e}(t)$ имеют смысл количества сотрудников специальности r и квалификации q, которое требуется учебному центру для обучения одного сотрудника специальности r' и квалификации q' на шаге t.

В качестве критерия учебного центра мы выбираем кассу в конце планового периода $M^e(T+1)$, который он стремится максимизировать.

В результате решения соответствующей оптимизационной задачи определяются следующие оптимальные значения переменных:

$$\hat{x}_{r,q}^{e,w}(t),\ y_{r,q}^{e,d}(t),\ t = 1,...,T$$

$$\hat{X}_{r,q}^{e,w}(t),\ \hat{X}_{r,q}^{e,d}(t),\ \hat{M}^e(t),\ t = 2,...,T+1$$

$$r = 1,\ldots,\bar{R},\ q = 1,\ldots,\bar{Q}_r .$$

4 Согласование подсистем

Совокупный спрос на труд

$$\Psi^{w}_{r,q}\left(t\right) = \hat{x}^{p,w}_{r,q}\left(t\right) + \hat{x}^{e,w}_{r,q}\left(t\right) \quad (27)$$

Совокупное предложение по труду

$$\Upsilon^{w}_{r,q}\left(t\right) = \hat{Y}^{c,w}_{r,q}\left(t\right), \quad (28)$$

где $\hat{Y}^{c,w}_{r,q}\left(t\right)$ – предложение труда со стороны потребителей.

$$\hat{Y}^{c,w}_{r,q}\left(t\right) = \left|\hat{K}^{c,w}_{r,q}\left(t\right)\right|, \quad (29)$$

$$\hat{K}^{c,w}_{r,q}\left(t\right) = \left\{k \mid k = 1,\ldots,\bar{K}, s_k = r, \hat{Q}_k\left(t\right) = q, \hat{y}^{c,w}_{k}\left(t\right) = 1\right\}, \quad (30)$$

Совокупный спрос на обучение

$$\Psi^{d}_{r,q}\left(t\right) = \hat{x}^{p,d}_{r,q}\left(t\right) + \hat{X}^{c,d}_{r,q}\left(t\right), \quad (31)$$

$$\hat{X}^{c,d}_{r,q}\left(t\right) = \left|\hat{K}^{c,d}_{r,q}\left(t\right)\right|, \quad (32)$$

$$\hat{K}^{c,d}_{r,q}\left(t\right) = \left\{k \mid k = 1,\ldots,\bar{K}, s_k = r, \hat{Q}_k\left(t\right) = q, \hat{x}^{c,d}_{k}\left(t\right) = 1\right\} \quad (33)$$

Совокупное предложение обучения со стороны учебного центра

$$\Upsilon^{d}_{r,q}\left(t\right) = \hat{y}^{e,d}_{r,q}\left(t\right). \quad (34)$$

Совокупный спрос на продукты со стороны потребителей

$$\Psi^{p}_{i}\left(t\right) = \hat{x}^{p}_{k,i}\left(t\right). \quad (35)$$

Совокупное предложение продуктов со стороны производителей

$$\Upsilon^{p}_{i}\left(t\right) = \hat{y}^{p}_{i}\left(t\right). \quad (36)$$

Заключение

Описанные ограничения могут допускать неединственное решение. Вследствие этого, возможно построение различных механизмов, реализуемых в рамках либо директивного управления, либо путём достижения экономического равновесия.

Литература

1. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике, М., 1964, – 838 с.
2. *Иванов Ю.Н., Сотникова Р.А.* Теоретическая экономика. Теория оптимального предприятия. / отд. изд. – М.: ЛЕНАНД, 2012. – 224 с.
3. *Клейнер Г.Б.* Производственные функции: теория, методы, применение. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 240 с.
4. *Ерешко Ф. И.* Модель финансовой Коалиции в динамике. // Автоматика и телемеханика, 2018. – № 10. – С. 76–94.
5. *Довгучиц С.И., Мушков А.Ю., Ерешко Ф.И.* Математическое моделирование в решении задач информационно-аналитического обеспечения управления развитием оборонно-промышленного комплекса. / Научный вестник оборонно-промышленного комплекса России, 2021 год. – Выпуск № 1 – С. 5–15.
6. *Сытов А.Н., Вахранев А.В., Ерешко Ф.И.* Исследование цифрового двойника предприятия // Управление развитием крупномасштабных систем MLSD’2021. Труды XIV межд. конф. М.: ИПУ РАН, 2021. С. 786–792.