

2.1 Сведения о сигма-функции

При решении обеих задач (9), (10) будем использовать гладкую и ограниченную сигма-функцию

$$\sigma(kx) = \frac{2}{1 + \exp(-kx)} - 1, \quad k = \text{const} > 0, \quad (11)$$

которая определена на всей числовой оси и имеет следующие свойства: $\sigma(-kx) = -\sigma(kx)$, $\sigma(kx) \sim kx/2$, $\sigma(kx) \sim \text{sign}(x)$ [10, 11]. В аргументе специально выделен множитель k , который в дальнейших построениях играет роль коэффициента усиления в малой окрестности нуля. Производная сигма-функции имеет рекурсивный вид:

$$\sigma'(kx) = k(1 - \sigma^2(kx)) / 2 > 0, \quad x \in R, \quad \sigma'(-kx) = \sigma'(kx).$$

Графики сигма-функции и ее производной приведены на рис. 2.

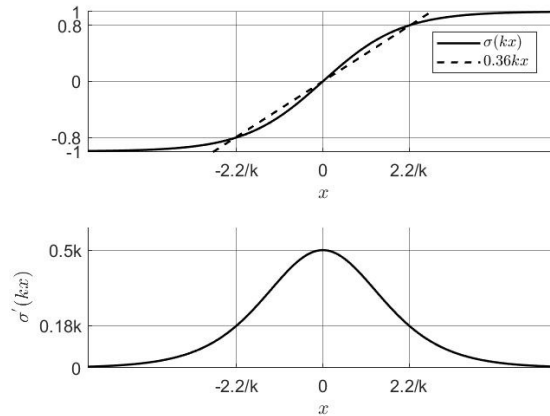


Рис. 2. Графики сигма-функции $y = \sigma(kx)$ и ее производной $y = \sigma'(kx)$.

Для упрощения анализа нелинейной сигма-функции установим ее аналогию с кусочно-линейной sat-функцией (рис. 2) и будем использовать следующие оценки:

$$\begin{aligned} 0,8 < |\sigma(kx)| < 1, \quad 0 < \sigma'(kx) < 0,18k, \quad |x| > 2,2/k; \\ 0,36k|x| \leq |\sigma(kx)| \leq 0,8, \quad 0,18k \leq \sigma'(kx) \leq \sigma'(0) = k/2, \quad |x| \leq 2,2/k, \end{aligned} \quad (12)$$

где точки $x = \pm 2,2/k$ являются границами разделения функции $\sigma(kx)$ на условно линейную и условно постоянную части.

2.2 Синтез обратной связи

Вначале рассмотрим проблему синтеза обратной связи, обеспечивающей отслеживание регулируемой переменной $x(t)$ нелинейной траектории $\chi(t)$ в предположении, что $\chi(t)$ удовлетворяет заданным ограничениям (10).

Запишем систему (1) относительно вектора ошибки слежения $e_1 = q_1 - q_{1d}$, где $e_1 = (e_{11} = x - \chi, \theta)^T$, $q_{1d} = (\chi, 0)^T$, и его производной $e_2 = (e_{21} = \dot{x} - \dot{\chi}, \dot{\theta})^T$:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= H^{-1}(q_1)[u - C(e_2 + \dot{q}_{1d}) - G(q_1) + \eta(t)] - \ddot{q}_{1d}. \end{aligned} \quad (13)$$

Управление сформируем в виде двух слагаемых [10]

$$F = -k_1 e_{11} - m_2 \sigma(k_2 e_{21}), \quad k_1, k_2, m_2 = \text{const} > 0, \quad (14)$$

где часть с сигма-функцией (11) предназначена для подавления внешних возмущений, k_1 , k_2 – коэффициенты усиления, m_2 – амплитуда, ограничивающая сигма-функцию по модулю.

Для анализа устойчивости замкнутой системы (13)–(14) рассмотрим следующего кандидата на функцию Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2} e_2^T H(q_1) e_2 + P(q_1) + \frac{1}{2} k_1 e_{11}^2 \geq 0, \quad (15)$$

где первые два слагаемых – это полная (кинетическая и потенциальная) энергия механической системы. С учетом (2), (3) производная (15) в силу системы (13)–(14) имеет вид:

$$\dot{V} = e_{21}(-m_2\sigma(k_2 e_{21}) - F_r - (M + m)\ddot{\chi}) + \dot{\theta}ml \cos(\theta)\dot{\chi}. \quad (16)$$

Вторую производную задающего воздействия $\chi(t)$ можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$\ddot{\chi} = \ddot{s}(t) - \gamma\dot{\theta}, \quad \gamma = \text{const} > 0, \quad (17)$$

первое из которых есть вторая производная S-образной функции $s(t)$, к которой предъявим следующее требование:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s^{(i)}(t) = x_d^{(i)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

Аналитический вид $s(t)$ будет конкретизирован в следующем подразделе. Второе слагаемое в (17), зависящее от угловой скорости $\dot{\theta}(t)$, предназначено для демпфирования колебаний стержня с грузом. С учетом (17) производная (16) примет следующий вид:

$$\dot{V} = e_{21}(-m_2\sigma(k_2 e_{21}) - F_r - (M + m)\ddot{s} + (M + m)\gamma\dot{\theta}) - \gamma\dot{\theta}^2 ml \cos(\theta) + \dot{\theta}ml \cos(\theta)\dot{s}. \quad (19)$$

В силу (4), (18) имеем соответственно: $-\gamma\dot{\theta}^2 ml \cos(\theta) < 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{s}(t) = 0$. Используя (5)–(7), (12), оценим производную (19) вне окрестности $|e_{21}| \leq 2, 2 / k_2 = \Delta_{21}$:

$$|\dot{V}| \leq |e_{21}|(-0, 8m_2 + \bar{F}_r + (\bar{M} + \bar{m})\gamma\Theta_1).$$

С учетом ограничения на управление (8) выбираем параметр γ и амплитуду сигма-функции

$$1, 25(\bar{F}_r + (\bar{M} + \bar{m})\gamma\Theta_1) < m_2 \leq \bar{F}, \quad (20)$$

что обеспечивает $\dot{V} < 0$ вне окрестности $|e_{21}| \leq \Delta_{21}$ и попадание в нее за некоторое конечное время, при этом желаемая величина $\Delta_{21} = \text{const} > 0$ достигается за счет выбора коэффициента усиления k_2 :

$$k_2 \geq 2, 2 / \Delta_{21}. \quad (21)$$

Из анализа (13)–(14) с учетом (22) следует, что заданная точность стабилизации (9) достигается при следующем выборе параметра k_1 :

$$k_1 \geq \Delta_{21} / \Delta_{11}. \quad (23)$$

Отметим, что полученные условия (20)–(23) на выбор параметров регулятора были выведены на основе консервативных оценок, значения параметров могут быть скорректированы по результатам имитационного моделирования.

2.3 Формирование траектории движения тележки

Перейдем к этапу планирования траектории движения ходовой тележки, удовлетворяющей (10). Дважды интегрируя (17), приходим к следующему виду эталонной траектории:

$$\chi(t) = s(t) - \gamma \int_0^t \theta(\tau) d\tau, \quad (24)$$

где в качестве функции $s(t)$ предлагается использовать сигма-функцию (11) со сдвигом вверх и вправо, а именно

$$s(t) = \frac{x_d}{1 + \exp(-a(t - T/b))}, \quad (25)$$

где T/b – смещение сигма-функции вправо, $b > 1$; $a > 0$ – угол наклона в точке $t = T/b$, максимальные колебания стержня с грузом происходят именно в окрестности этой точки, а с ростом a амплитуда колебаний увеличивается.

Функция (25) и ее производные ограничены:

$$\begin{aligned} 0 < s(t) < x_d, 0 < \dot{s}(t) \leq ax_d / 4, \\ |\ddot{s}(t)| \leq a^2 x_d / 10, 4, t \in R; \lim_{t \rightarrow \infty} s^{(i)}(t) = 0, i = 1, 2. \end{aligned} \quad (26)$$

Для выполнения заданных ограничений (8) в силу (5), (25) параметр a необходимо выбирать из неравенства:

$$0 < a \leq \min \left\{ \frac{4\bar{X}_1 - 2\pi\gamma}{x_d}, \sqrt{\frac{10,4(\bar{X}_2 - \gamma\Theta_1)}{x_d}} \right\}. \quad (27)$$

При выбранном значении a (27) определим параметр b , обеспечивающий $x_d - \Delta_0 \leq \chi(T)$ (10)

$$b \geq \frac{aT}{aT - \ln((x_d + \gamma\pi T / 2 - \Delta_0) / \Delta_0)}.$$

При невыполнении условия $aT > \ln((x_d + \gamma\pi T / 2 - \Delta_0) / \Delta_0)$ следует увеличить значения T и/или $0 < \Delta_0 < x_d + \gamma\pi T / 2$. В итоге будет получена эталонная траектория (24)–(25), удовлетворяющая (8), (10), (18). Настройка ее параметров с учетом ограничений механической системы конструктивна, а ее аналитический вид проще по сравнению с S-образной функцией, предложенной в [1]

$$\bar{s}(t) = \frac{x_d}{2} + \frac{x_d}{2\varepsilon_2} \ln \left(\frac{\exp(pt - \varepsilon_1) + \exp(-(pt - \varepsilon_1))}{\exp(pt - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \exp(-(pt - \varepsilon_1 - \varepsilon_2))} \right),$$

где $p > 0$ – регулирует время достижения заданного положения, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ введены для оптимизации колебаний стержня с грузом [1].

3 Результаты численного моделирования

Для проверки эффективности разработанного подхода было проведено численное моделирование замкнутой системы в среде MATLAB-Simulink. Интегрирование проводилось методом Эйлера с постоянным шагом 10^{-3} . Рассматривались следующие диапазоны изменения параметров:

$$6,5 \leq M \leq 7,2 \text{ [кг]}, \quad 0,8 \leq m \leq 5,5 \text{ [кг]}, \quad 0,73 \leq l \leq 0,79 \text{ [м]}.$$

При моделировании были приняты следующие значения и внешнее возмущение [3]:

$$M = 7 \text{ [кг]}, \quad m = 1,025 \text{ [кг]}, \quad l = 0,75 \text{ [м]},$$

$$F_r(t) = f_{r0} \tanh(\dot{x} / \varepsilon) - k_r |\dot{x}| \dot{x},$$

где $f_{r0} = 4,4$, $\varepsilon = 0,01$, $k_r = -0,5$ – параметры силы трения [1].

Требовалось стабилизировать заданное положение ходовой тележки $x_d = 0,6$ [м] с точностью $\Delta_{11} = 0,02$ [м] за время $T \approx 8$ [с].

С одними и теми же параметрами регулятора $k_1 = 100$, $k_2 = 5$, $m_2 = 40$, принятыми на основе (28)–(29), было проведено четыре эксперимента с разными задающими воздействиями:

- 1) постоянное $\chi = x_d$;
- 2) постоянное с интегралом от угловой координаты $\chi(t) = x_d - \gamma \int_0^t \theta(\tau) d\tau$, $\gamma = 5$;
- 3) в виде сигма-функции $\chi(t) = s(t)$, где $s(t)$ (25), $a = 1,9$, $b = 5,33$;
- 4) в виде двух слагаемых – сигма-функции и интеграла от угловой координаты (основной результат работы) $\chi(t) = s(t) - \gamma \int_0^t \theta(\tau) d\tau$, где $s(t)$ (25), $\gamma = 5$, $a = 1,9$, $b = 5,33$.

На рис. 3 приведены графики данных задающих воздействий. Для всех экспериментов на рис. 4 представлены графики положения ходовой тележки $x(t)$, на рис. 5 – графики ошибки слежения $e_{11}(t)$, а на рис. 6 – графики угла отклонения стержня от вертикальной оси $\theta(t)$. На левом рис. 6 представлены результаты всех экспериментов, а на правом рис. 6 дополнительно показан график $\theta(t)$ для первого эксперимента, в котором колебания очень долго не затухают.

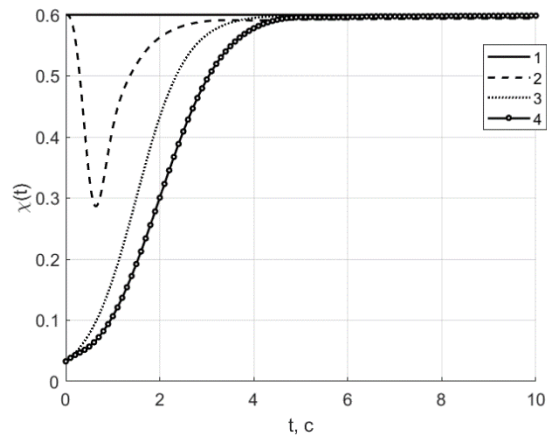


Рис. 3. Графики задающего воздействия $\chi(t)$

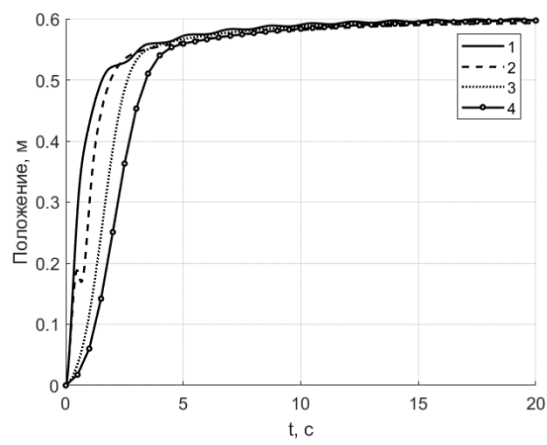


Рис. 4. Графики положения ходовой тележки $x(t)$

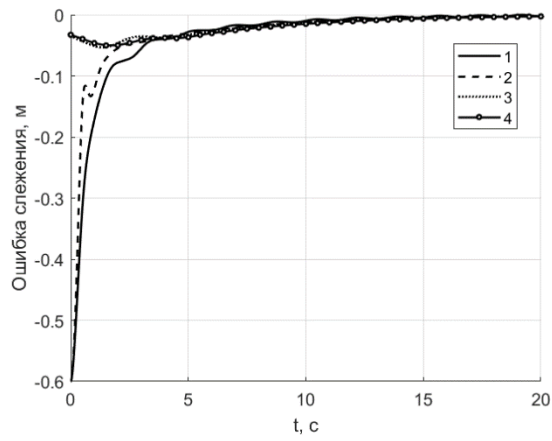


Рис. 5. Графики ошибки слежения $e_{11}(t)$

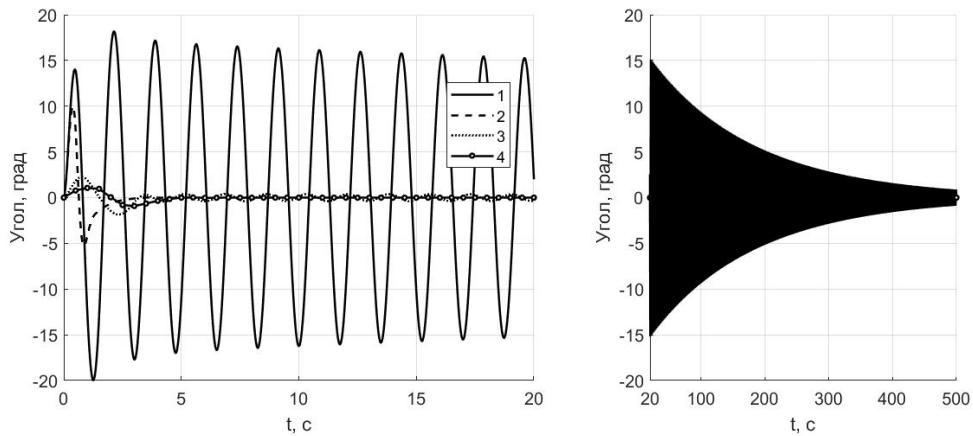


Рис. 6. Графики угла отклонения стержня от вертикальной оси $\theta(t)$

В табл. 1 для всех экспериментов представлены: время регулирования t_* [с]: $|x(t) - x_d| \leq 0,02$ [м], $t \geq t_*$; величина перерегулирования ошибки слежения: $e_{11,\max} \geq |e_{11}(t)|$ [м], $t \geq 0$; максимальный угол отклонения стержня от вертикальной оси: $\theta_{\max} \geq |\theta(t)|$ [град], $t \geq 0$; время затухания колебаний t_3 [с]: $|\theta(t)| \leq 0,5$ [град], $t \geq t_3$.

Таблица 1. Значения показателей качества регулирования

Показатель	Эксперимент 1	Эксперимент 2	Эксперимент 3	Эксперимент 4
t_* , с	6,5920	7,2510	7,5540	8,322
$e_{11,\max}$, м	0,6	0,6	0,0534	0,0506
θ_{\max} , град	19,9744	9,9958	2,2459	1,1203
t_3 , с	595,9010	2,1510	3,0040	3,7280

Цель управления выполнена во всех экспериментах, и заданная точность слежения достигнута (рис. 5). Из табл. 1 и рис. 6 следует, что ввод интеграла от угловой координаты в задающее воздействие (эксперимент 2) привел к уменьшению θ_{\max} в 2 раза и к более быстрому затуханию колебаний по сравнению с экспериментом 1. Для экспериментов 3 и 4 благодаря сигма-функции в задающем воздействии значение θ_{\max} уменьшилось примерно в 9 и 18 раз соответственно по сравнению с экспериментом 1, а также $e_{11,\max}$ – в 11 раз при незначительном увеличении времени регулирования t_* . Заметим, что если амплитуда колебаний не превышает допустимую по технологическим требованиям, то можно упростить планирование траектории (эксперимент 4), отказавшись от интегрального члена, и использовать только сигмоидальное задание (эксперимент 3).

Заключение

Цель работы состояла в стабилизации заданного положения ходовой тележки ОМК при действии на объект внешних возмущений и наличии параметрических неопределенностей в модели. Цель была достигнута за счет использования закона управления с сигмоидальной частью, гарантирующего подавление неопределенностей исходя из известного и наилучшего диапазона их изменения. Предложена траектория ходовой тележки в виде суммы двух слагаемых – сигма-функции и интеграла от угловой координаты, реализация которой позволяет уменьшить амплитуду колебаний стержня с грузом по сравнению с использованием постоянного задающего воздействия.

Литература

1. Ma B., Fang Y., Zhang X. Adaptive Tracking Control for an Overhead Crane System // Proceedings of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control. 2008. P. 12194-12199.
2. Aguilar-Ibanez C., Suarez-Castanon M.S. A Trajectory Planning Based Controller to Regulate an Uncertain 3D Overhead Crane System // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2019. Vol. 29, No. 4. P. 693-702.
3. Wu Z. Optimal motion planning for overhead cranes // IET Control Theory and Applications. 2014. Vol. 8. P. 1833-1842.

4. *Fantoni I. and Lozano R.* Non-linear control for underactuated mechanical systems. London: Springer Verlag. 2002. P. 43-51.
5. *Romero J.G., Donaire A. and Borja P.* Global Stabilisation of Underactuated Mechanical Systems via PID Passivity-Based Control // IFAC-PapersOnLine. 2017. Vol. 50, No. 1. P. 9577-9582.
6. *Papadopoulos A.D., Rompokos A.A. and Alexandridis A.T.* Nonlinear and observer-based PD position and sway control of convey-crane systems // 2016 24th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED). 2016. P. 696-700.
7. *Nur Iffah Mohamed Azmi, Nafrizuan Mat Yahya, Ho Jun Fu, Wan Azhar Wan Yusoff.* Optimization of the PID-PD parameters of the overhead crane control system by using PSO algorithm //MATEC Web of Conferences. 2019. 8 p.
8. *Lu B., Fang Y., Sun N.* Sliding mode control for underactuated overhead cranes suffering from both matched and unmatched disturbances // Mechatronics. 2017. Vol. 47. P. 116-125.
9. *Vázquez C., Fridman L. and Collado J.* Second Order Sliding Mode Control of an Overhead-Crane in the presence of external perturbations // 52nd IEEE Conference on Decision and Control. 2013. P. 2876-2880.
10. *Антипов А.С., Краснова С.А.* Система стабилизации положения тележки крана с использованием сигмоидальной функции // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20. № 10. С. 609-614.
11. *Антипов А.С., Краснова С.А., Уткин В.А.* Синтез инвариантных нелинейных одноканальных систем слежения с сигмоидальными обратными связями с обеспечением заданной точности слежения // Автоматика и телемеханика. 2022. № 1. С. 40-66.
12. *Sun N., Fang Y., Zhang Y. and Ma B.* A Novel Kinematic Coupling-Based Trajectory Planning Method for Overhead Cranes // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. 2012. Vol. 17, No. 1. P. 166-173.