

ПОСТРОЕНИЕ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ НА ОСНОВЕ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ, ПОЛУЧЕННОГО ПО МЕТОДУ НАКРЫТИЙ, ДЛЯ ПЛОСКИХ РОБОТОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ¹

Белинская Ю.С.

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,
Россия, г. Москва, просп. 60-летия Октября, д. 11
usbelka@mail.ru

Аннотация: В работе рассматривается решение задач терминального управления для плоских динамических систем. В качестве метода решения рассматривается метод накрытий, который позволяет находить программную траекторию и программное управление, реализующее движение по найденной траектории. В работе предлагается метод построения синтезирующего управления на основе программного управления, полученного по методу накрытий. Рассматриваются два примера построения такого управления. В качестве одного из примеров рассматривается движение мобильного робота с дифференциальным приводом. Результаты численного моделирования демонстрируют эффективность предложенного подхода.

Ключевые слова: плоские системы, метод накрытий, программное управление, обратная связь, колесный робот

Введение

Задача управления любой крупномасштабной системой предполагает использование методов автоматического управления [1]. С увеличением количества подсистем возрастает и сложность взаимосвязей между подсистемами, и необходимость решения большого количества задач управления для каждой из подсистем, поэтому методы решения задач управления становятся все более актуальными. Одной из самых часто возникающих задач управления являются так называемые терминальные задачи, или задачи терминального управления [2]. Эта задача заключается в нахождении траектории, соединяющей заданное начальное и конечное положения системы, а также управления, реализующего движение по найденной траектории.

В общем случае методы решения задач терминального управления известны лишь для некоторых классов систем [3-5]. Например, для статически линеаризуемых систем популярным методом является нахождение такого преобразования переменных системы, что в новых координатах полученная система имеет так называемый канонический вид [6], при этом в канонических переменных траектория представляет собой полиномиальную зависимость от времени. В более общем случае плоских систем [7] также существует преобразование фазовых переменных системы к каноническому виду. На первый взгляд, плоскостность является серьезным ограничением использования метода, но в действительности многие рассматриваемые в приложениях динамические системы являются плоскими.

Еще одним перспективным методом решения задач терминального управления является метод, основанный на понятии накрытия [8]. Границы использования этого метода достаточно широкие: метод можно применять как для плоских, так и для неплоских систем [9]. Метод заключается в поиске специальной подсистемы (Γ -замыкания) и специального отображения (накрытия), такой, что существует взаимно-однозначное отображение между фазовыми траекториями исходной и преобразованной системы. В этом случае задача терминального управления сводится к решению двух последовательных, связанных между собой задач Коши. В случае плоских систем дополнительным преимуществом указанного метода является возможность поиска Γ -замыкания в виде произвольного дифференциального управления, порядок которого равен количеству граничных условий [10].

При всех преимуществах метод накрытий имеет и серьезный недостаток: в результате его применения возможно построение только программного управления, реализующего движение по заданной траектории. Это может стать серьезным препятствием для использования метода в случае наличия погрешности при определении состояния системы. Поэтому стоит разработать метод построения обратной связи на основе этого программного управления. В работе [11] была попытка

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00716, <https://rscf.ru/project/22-21-00716>.

построения синтезирующего управления на основе построенного ранее программного управления. В данной работе предложен более общий метод синтеза управления.

Работа организована следующим образом. В разделе 1 описан метод накрытий для плоских систем и его модификация для построения обратной связи. В разделе 2 рассмотрен первый из рассматриваемых примеров: двумерная система канонического вида со скалярным управлением. В разделе 2 рассмотрена второй пример: система дифференциальных уравнений, описывающая кинематику колесного робототехнического объекта.

1 Синтез управления на основе программного управления метода накрытий

1.1 Описание метода накрытий

Пусть дана динамическая система с векторным управлением

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in X \subseteq R^n, \quad u \in U \subseteq U^m, \quad (1)$$

и для этой системы поставлена задача терминального управления

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f, \quad (2)$$

где t_0 – начальный момент времени, t_f – заданный конечный момент времени.

Предположим, что мы нашли функции $U_i, \varphi_j, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$, переменных

$$t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dot{u}_1, \dots, u_1^{(k_1-1)}, u_2, \dots, u_m^{(k_m-1)}, \quad (3)$$

удовлетворяющие условиям:

(А) Соотношения вида $p_j = \varphi_j, j = 1, \dots, n$ определяют накрытие из системы

$$\dot{x}_j = f_j(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m), \quad j = 1, \dots, n, \quad (4)$$

$$u_i^{(k_i)} = U_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dot{u}_1, \dots, u_1^{(k_1-1)}, u_2, \dots, u_m^{(k_m-1)}), \quad i = 1, \dots, m, \quad (5)$$

в систему вида

$$\dot{p} = P(t, p), \quad p \in R^n. \quad (5)$$

(В) Заданные конечные условия на функцию x однозначно определяют конечные условия на функцию p и наоборот, конечные условия на функцию p определяют конечные условия на функцию x .

(С) Из начальных условий на функцию p можно однозначно определить начальные условия для переменных

$$u_1, \dot{u}_1, \dots, u_1^{(k_1-1)}, u_2, \dots, u_m^{(k_m-1)}. \quad (6)$$

В случае выполнения условий (А), (В), (С) задача может быть решена следующим образом:

1) Из конечных условий (5) вычисляем конечные условия на функцию p ,

2) Решаем задачу Коши для системы (9) с начальными условиями в точке t_f в сторону уменьшения времени,

3) Из начальных условий на функцию p находим начальные условия для переменных (6), а именно

$$u_1(t_0), \dot{u}_1(t_0), \dots, u_1^{(k_1-1)}(t_0), u_2(t_0), \dots, u_m^{(k_m-1)}(t_0). \quad (7)$$

Управление в этом случае может быть найдено как решение задачи Коши для уравнений (4)-(5) с начальными условиями $x(t_0) = x_0$ и (7). Найденное таким образом решение есть решение задачи (1), (2), так как построенная функция $x(t)$ удовлетворяет начальным условиям (2) по построению, а конечным условиям (2) из условия (В).

Систему вида (4)-(5), удовлетворяющую условиям (А), (В), (С) для некоторых функций φ_j , будем называть Γ -замыканием задачи терминального управления (1), (2). Как показано выше, Γ -замыкание позволяет решать задачу терминального управления.

Пусть управление в системе (1) l раз дифференцируемо. Система (1) называется плоской [7], если определен такой набор функционально независимых функций

$$y_1 = h_1(t, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(l)}), \dots, y_m = h_m(t, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(l)}), \quad (8)$$

что все переменные состояния и управления системы (1) могут быть выражены через функции плоского выхода и их производные. Плоские системы эквивалентны системам вида

$$y_i^{(n_i)} = v_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (9)$$

причем $n_1 + \dots + n_m = n$.

В работе [10] было показано, что в качестве г-замыкания произвольной задачи терминального управления для плоской системы можно взять любое дифференциальное уравнение, порядок которого равен количеству граничных условий задачи, то есть $2n$. Этим объясняется удобство использования метода накрытий для решения задачи терминального управления для плоской системы. Тем не менее, управление, построенное с помощью описанного метода, зависит только от времени, а не от текущего состояния системы, а потому при наличии возмущений, действующих на правую часть системы, вектор состояния может значительно отклоняться от желаемого значения.

1.2 Предлагаемый метод синтеза управления, построенного по методу накрытий

Пусть рассматриваемая динамическая система (1) является плоской, и пусть удалось построить решение задачи терминального управления (2) методом накрытий. Рассмотрим значения (7) как параметры управляющего воздействия, заданные в произвольный момент времени

$$u_1(t), \dot{u}_1(t), \dots, u_1^{(k_1-1)}(t), u_2(t), \dots, u_m^{(k_m-1)}(t), \quad t \in [t_0, t_f]. \quad (10)$$

Пусть уравнение

$$p_t = \varphi(t, x_{1,t}, \dots, x_{n,t}, u_1(t), \dots, u_1^{(k_1-1)}(t), u_2(t), \dots, u_m^{(k_m-1)}(t)) \quad (11)$$

однозначно разрешимо относительно переменных (10). Тогда решение задачи Коши для уравнений (4)-(5) имеет вид

$$u_j = U_j(t_0, t_f, x_0, x_f), \quad j = 1, \dots, m, \quad (12)$$

то есть зависит только от граничных значений исходной задачи и единственным образом определяется через эти параметры. Тогда управление

$$\tilde{u}_j = U_j(t, t_f, x, x_f) \quad (13)$$

имеет вид синтезирующего управления для решения задачи (1)-(2).

Управление, определяемое по формулам (13), может не быть устойчивым относительно текущего состояния x . В этом случае к \tilde{u} необходимо добавить слагаемое таким образом, чтобы система дифференциальных уравнений в отклонениях переменных плоского выхода от желаемого значения была асимптотически устойчива при $t \rightarrow \infty$. Это слагаемое можно выбрать в виде

$$e_i^{(n_i)} = \sum_{j=0}^{n_i-1} \gamma_{i,j} e_i^{(j)}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (14)$$

где $e_i = y_i - y_{*i}(t)$, коэффициенты $\gamma_{i,j}$ находятся из асимптотической устойчивости (14), а $y_{*i}(t)$ - желаемые траектории в переменных плоского выхода.

2 Пример 1 – каноническая система со скалярным управлением

2.1 Решение задачи терминального управления

Рассмотрим систему второго порядка со скалярным управлением

$$\ddot{y} = v, \quad v \in R. \quad (15)$$

Пусть дана задача терминального управления

$$y(t_0) = y_0, \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \quad y(t_f) = y_f, \quad \dot{y}(t_f) = \dot{y}_f. \quad (16)$$

Будем искать решение в пространстве многочленов порядка не выше третьего, то есть среди решений дифференциального уравнения $y^{(4)} = 0$. Рассмотрим функцию

$$p = y - \frac{1}{2}(t_f - t)^2 \ddot{y} - \frac{1}{3}(t_f - t)^3 \ddot{\ddot{y}}. \quad (17)$$

Ее производные по времени с учетом условия $y^{(4)} = 0$ равны

$$\dot{p} = \dot{y} + (t_f - t)\ddot{y} + \frac{1}{2}(t_f - t)^2 \ddot{\ddot{y}}, \quad (18)$$

$$\ddot{p} = 0. \quad (19)$$

Следовательно, уравнение (17) определяет накрытие из системы (19) в заданную систему (15). Из уравнений (17)-(18) определим конечные значения на функцию p , зная y_f, \dot{y}_f . Получим

$$p(t_f) = y_f, \quad \dot{p}(t_f) = \dot{y}_f. \quad (20)$$

Решение задачи Коши для уравнения (19) с начальными условиями (20) имеет вид

$$p(t) = y_f + \dot{y}_f(t - t_f). \quad (21)$$

Подставим в уравнения (17)-(18) $t = t_0$ и разрешим систему относительно второй и третьей производной функции y в начальный момент времени. Получим

$$\ddot{y}(t_0) = \frac{6(y_f - y_0) - (4\dot{y}_0 + 2\dot{y}_f)(t_f - t_0)}{(t_f - t_0)^2}, \quad (22)$$

$$\dddot{y}(t_0) = \frac{-12(y_f - y_0) + 6(\dot{y}_0 + \dot{y}_f)(t_f - t_0)}{(t_f - t_0)^3}. \quad (23)$$

Получаем полный набор начальных условий задачи Коши для дифференциального уравнения $y^{(4)} = 0$: заданные значения y_0, \dot{y}_0 и определяемые из формул (22)-(23) значения второй и третьей производной y в начальный момент времени. Решение такой задачи Коши определяет желаемую траекторию $y^*(t)$. Тогда программное управление для решения системы (15), удовлетворяющего граничным условиям (16), имеет вид

$$v(t) = \ddot{y}(t_0) + \dddot{y}(t_0)(t - t_0), \quad (24)$$

где значения $\ddot{y}(t_0), \dddot{y}(t_0)$ определяются из уравнений (22), (23). Таким образом, синтезирующее управление для задачи терминального управления (16) имеет вид

$$v(t, x) = \frac{6(y_f - y) - (4\dot{y} + 2\dot{y}_f)(t_f - t)}{(t_f - t)^2}. \quad (25)$$

При $t \rightarrow t_f$ функция $v(t, x)$ стремится к нулю, а потому следует заменить управление (25) на программное управление (24) или просто считать, что $v(t, x) = 0$. Для стабилизации движения системы вблизи желаемой траектории рассмотрим также стабилизирующую обратную связь

$$\tilde{v}(t, x) = v(t, x) + (\lambda_1 + \lambda_2)(\dot{y} - \dot{y}^*(t)) - \lambda_1\lambda_2(y - y^*(t)), \quad (26)$$

где $\lambda_1 < 0, \lambda_2 \neq \lambda_1, \lambda_2 < 0$ – заданные действительные числа.

2.2 Результаты численного моделирования

Пусть для системы (15) заданы граничные условия (16) со значениями

$$t_0 = 0, t_f = 6, y_0 = 0, \dot{y}_0 = 0, y_f = 10, \dot{y}_f = 1, \quad (27)$$

а также $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$. Будем считать, что при выполнении условия

$$|t - t_f| < \varepsilon, \quad \varepsilon = 0.1, \quad (28)$$

управление выбирается по формуле (25), а при невыполнении этого условия – по формуле (24). Также построим графики траекторий при управлении, выбираемой по формуле (26). Результаты представлены на рис. 1.

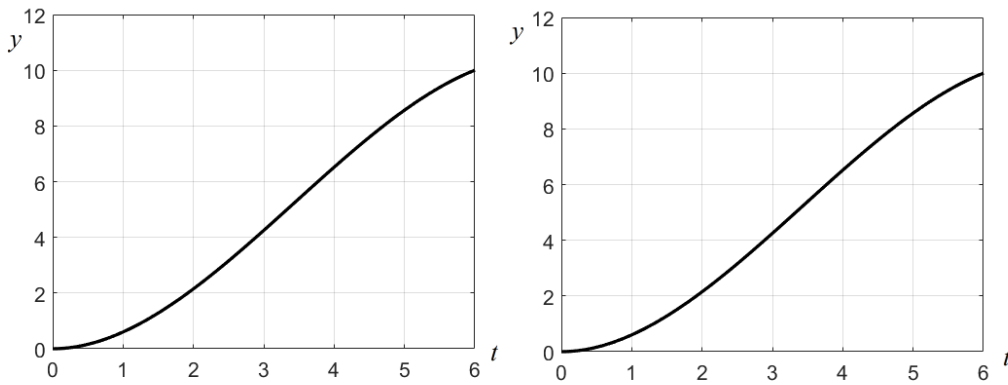


Рис. 1. Слева: график траектории системы, замкнутой обратной связью (25)-(24), справа: график траектории системы, замкнутой обратной связью (26)

Видно, что в каждом случае построенная обратная связь решает поставленную задачу терминального управления. Более того, графики визуально не отличаются.

Пусть начальное состояние системы (15) известно неточно. В этом случае обратная связь должна вернуть систему на построенную траекторию. Считая, что

$$y_0 = 1, \dot{y}_0 = 0.5, \quad (29)$$

Построим графики траекторий движения системы (15), замкнутой обратной связью (25)-(24) и (26). Результат представлен на рис. 2. Пунктиром на рисунке изображена планируемая траектория $y^*(t)$.

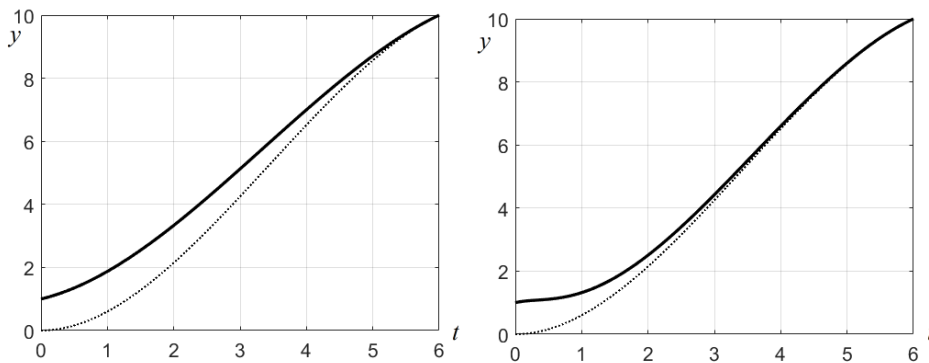


Рис. 2. Слева: график траектории, замкнутой обратной связью (25)-(24), справа: график траектории системы, замкнутой обратной связью (26), при наличии начальных возмущений

Видно, что каждый вид обратной связи корректно решает поставленную задачу терминального управления. Добавление стабилизирующей добавки увеличивает скорость стремления к построенной траектории. Происходит это потому, что формулы (25)-(24) перестраивают желаемую траекторию таким образом, чтобы выполнялись конечные условия задачи терминального управления.

3 Пример 2 – движение четырехколесного мобильного робота

3.1 Решение задачи терминального управления

Рассмотрим динамическую систему, движение которой описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = v \cos \varphi, \quad \dot{y} = v \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = w \quad (30)$$

с трехмерным состоянием (x, y, φ) и двумерным управлением (v, w) . Переменные (x, y) задают положение центра масс робота, φ – ориентацию робота в пространстве, v – линейную, а w – угловую скорость. Эта система может задавать, например, движение мобильного робота с дифференциальным приводом [12] или четырехколесного мобильного робота с независимо управляемыми колесами [13]. Пусть для системы (30) поставлена задача терминального управления

$$x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, \varphi(t_0) = \varphi_0, \quad x(t_f) = x_f, y(t_f) = y_f, \varphi(t_f) = \varphi_f. \quad (31)$$

Система (30) является плоской с плоским выходом

$$y_1 = x, \quad y_2 = y. \quad (32)$$

В самом деле, переменные состояния и линейная скорость v могут быть выражены через функции плоского выхода и его производные до первого порядка включительно следующим образом:

$$x = y_1, \quad y = y_2, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\dot{y}_1}{\dot{y}_2}, \quad v = \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}, \quad (33)$$

а для w достаточно продифференцировать по времени выражение для v . Вводя дополнительную переменную

$$\xi = v = \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}, \quad (34)$$

получаем расширенную систему

$$\dot{x} = \xi \cos \varphi, \quad \dot{y} = \xi \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{\xi} (v_1 \sin \varphi - v_2 \cos \varphi), \quad \dot{\xi} = v_1 \cos \varphi + v_2 \sin \varphi, \quad (35)$$

которая эквивалентна системе канонического вида

$$\ddot{y}_1 = v_1, \quad \ddot{y}_2 = v_2. \quad (36)$$

Заметим, что система (30) является плоской при $v \neq 0$.

Таким образом, решение задачи терминального управления для системы (30) в пространстве переменных плоского выхода может быть найдено аналогичным примеру 1 образом, после чего с помощью формул (33) его можно найти и в заданном пространстве. При этом надо задать граничные условия для дополнительной переменной

$$\xi(t_0) = \xi_0, \quad \xi(t_f) = \xi_f. \quad (37)$$

3.2 Результаты численного моделирования

Пусть для системы (30) заданы граничные условия (31), (37) со значениями

$$t_0 = 0, \quad t_f = 25, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad \xi_0 = 1.5, \quad x_f = 20, \quad y_f = 20, \quad \varphi_f = 0, \quad \xi_f = 1.5. \quad (38)$$

Перепишем задачу в терминах плоского выхода, найдем программные траектории $y_1^*(x), y_2^*(x)$ и построим синтезирующее управление для v_1, v_2 . Как и раньше, рассмотрим обратную связь со стабилизирующим слагаемым и без него. На рис. 3 изображен график решения $y(x)$ системы (30), замкнутой обратной связью. При этом начальное состояние отклонено из расчетного положения (37) следующим образом:

$$x_0 = -2, \quad y_0 = 1, \quad \varphi_0 = 0.5. \quad (39)$$

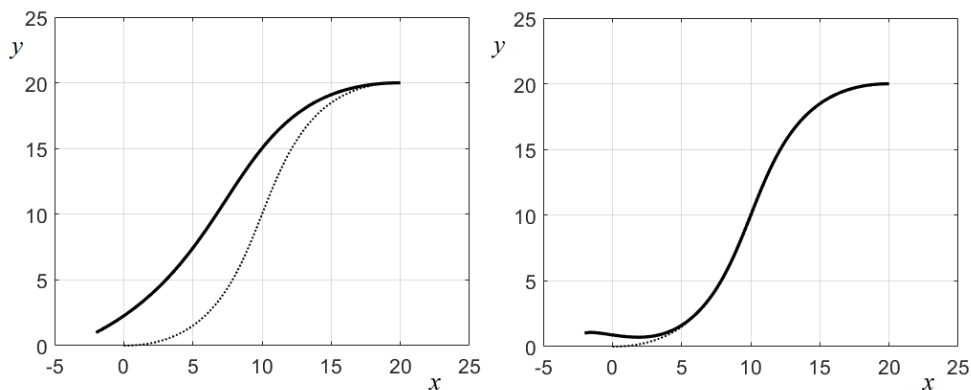


Рис. 3. Слева: график траектории, замкнутой обратной связью, справа: график траектории системы, замкнутой обратной связью со стабилизирующим слагаемым, при наличии начальных возмущений

Видно, что найденное управление решает поставленную задачу терминального управления.

Заключение

В работе предложен метод замены программного управления, построенного по методу накрытий, на обратную связь. Представлено соответствующее накрытие и два вида синтеза управления.

Алгоритм иллюстрирован двумя примерами. В первом примере рассмотрена система канонического вида второго порядка со скалярным управлением. Во втором примере рассмотрены кинематические уравнения, которые могут применены для описания различных мобильных робототехнических колесных систем, в том числе для четырехколесного мобильного робота с независимо управляемыми колесами. Показано, что движение такой системы может быть описано двумя системами канонического вида, управляемыми независимо. Графики численного моделирования демонстрируют эффективность каждого из предложенных подходов.

Литература

1. *Das B., Subudhi B., Pati B. B.* Cooperative formation control of autonomous underwater vehicles: An overview // *International Journal of Automation and computing*. 2016. Vol. 13(3). Pp. 199-225.
2. *Nieuwenhuisen M., Behnke S.* 3D planning and trajectory optimization for real-time generation of smooth MAV trajectories // *Mobile Robots (ECMR)*. 2015 European Conference on. IEEE2015. Pp. 1-7.
3. *Hu Q., Xie J., Wang C.* Dynamic path planning and trajectory tracking using MPC for satellite with collision avoidance // *ISA Transactions*. 2019. Vol. 84, Pp. 128-141.
4. *Cai G., Dias J., Seneviratne L.* A survey of small-scale unmanned aerial vehicles: Recent advances and future development trends // *Unmanned Systems*. 2014. Vol. 2 (2). Pp. 175-199.
5. *Patle B.K., Ganesh Babu L., Padley A., Parhi D.R.K., Jagadeesh A.* A review: On path planning strategies for navigation of mobile robot. 2019. Vol. 15, Is. 4. Pp. 582-606.
6. *Isidori A.* *Nonlinear Control Systems*. Berlin: Springer, 1995. 549 p.
7. *Fliess M., Levine J. L., Martin Ph., Rouchon P.* Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples // *International Journal of Control* 61(6). 1995. P. 1327-1361.
8. Симметрии и законы сохранения математической физики, под. ред. А.М. Виноградова и И.С. Красильщика // 2 изд., испр. и доп. М.: Факториал. 2005, 474 с.
9. *Белинская Ю.С., Четвериков В.Н.* Метод накрытий для терминального управления с учетом ограничений // *Дифференциальные уравнения*. 2014. Т. 50, No. 12. С.1629-1635.
10. *Belinskaya Yu. S., Chetverikov V. N.* Covering Method for Point-to-Point Control of Constrained Flat System // *IFAC-Papers OnLine*. 2015. Vol. 48, No. 11, P. 924-929.
11. *Белинская Ю.С.* Численное исследование влияния регулярных возмущений на управление, построенное по методу накрытий // *Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2020): труды Тринадцатой Международной конференции, 28–30 сентября 2020 г., Москва, под общей редакцией С.Н. Васильева, А.Д. Цвиркуна; Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва: ИПУ РАН, 2020, с. 647-654. DOI: 10.25728/mlsd.2020.0647.*
12. *Tang C.P.* Differential Flatness-based Kinematic and Dynamic Control of a Differentially Driven Wheeled Mobile Robot // *Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Robotics and Biometrics, December 19-23, 2009, Guilin, China*. Pp. 2267-2272.
13. *Khan S., Guivant J., Li X.* Design and experimental validation of a robust model predictive control for the optimal trajectory tracking of a small-scale autonomous bulldozer // *Robotics and Autonomous Systems*, 147 (2022) 103903, <https://doi.org/10.1016/j.robot.2021.103903>.