DOI: 10.25728/mlsd.2022.0573

ПРИБЛИЖЕННЫЕ СИМВОЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ[1]

Даник Ю.Э., Дмитриев М.Г.

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Россия, г. Москва просп. 60-летия октября д.9

yuliadanik@gmail.com, mdmitriev@mail.ru

Аннотация: Предлагается подход к построению семейства приближенных аналитических регуляторов для дискретных нелинейных управляемых систем, в которых можно выделить или ввести малый положительный параметр. Построение символьных законов обратной связи ведется с помощью асимптотических разложений, аппроксимаций Паде и экстраполяционных процедур.

Ключевые слова: дискретные системы управления, регуляторы, малый параметр, аппроксимации Паде, экстраполяция.

Введение

В настоящее время в связи с бурным развитием робототехники и различных автономных объектов большие требования предъявляются к алгоритмам управления нелинейными динамическими системами в виде обратной связи, обеспечивающих расчет субоптимальных траекторий в режиме реального времени.

Как представляется авторам, один из подходов к созданию таких алгоритмов может включать создание библиотеки законов управления для конкретного класса объектов и определенной базы правил, использование которых позволяет выбирать соответствующий закон управления за значительно меньшее время.

Здесь приводится один из подходов к построению такого семейства регуляторов, если в математической модели автономного объекта можно выделить или ввести малый положительный параметр, изменяющийся на некотором конечном интервале. Получены результаты по построению приближенных символьных представлений законов обратной связи в нелинейных дискретных системах управления.

Обратная связь в нелинейных задачах оптимального управления конструируется с помощью техники подходов SDRE, D-SDRE [1-3], где синтез находится по формальной схеме алгоритма Калмана для линейно квадратичных задач и все матрицы в системе и критерии оптимальности могут быть зависящими от переменных состояния.

Символьное описание законов обратной связи можно получить на основе аппроксимаций Паде (ПА), использующих асимптотические приближения к матрицам коэффициентов усиления в цепи обратной связи при малых значениях параметра [4-10]. При этом используется соответствующая техника построения асимптотики решений задач оптимального управления с регулярно [11-13] возмущенными уравнениями.

Выделение малого параметра в задачах управления связано со спецификой постановки, где таким образом подчеркивается, что система либо слабо нелинейная, либо наоборот сильно нелинейная [3, 4, 7, 10] или слабо управляемая или допускается большой коэффициент усиления в цепи обратной связи [4, 6-9], или в системе присутствуют разнотемповые движения [13-14], либо параметр подчеркивает связи в модели с подсистемами[11, 5] или в дискретном случае указывает на малый шаг или большое число шагов [10].

Теоретические результаты и алгоритмы иллюстрируются различными численными экспериментами, дополняющие эксперименты, приведенные в работах [4-10].

1 Дискретные квазилинейные системы с параметром

Пусть имеется слабо нелинейная дискретная управляемая система формально линейная по состоянию и управлению, но при этом коэффициенты всех матриц могут зависеть от состояния и некоторого положительного малого параметра μ

[1] *Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №21-11-00202*

$$x(t+1) = A(x(t),\mu)x(t) + B(x(t),\mu)u(t) = (A_0 + \mu A_1(x(t)))x(t) + (B_0 + \mu B_1(x(t)))u(t),$$
$$x(0) = x_0,\ x(t) \in X \subset R^n,\ u(t) \in R^r, \tag{1}$$
$$t = 0,1,2...,\ 0 < \mu \le \mu_0,$$

где $x(t) \in X \subset R^n$ – вектор состояния, $u \in R^r$ – вектор управления, A_0, B_0 – некоторые постоянные матрицы, $A_0,\ A_1(x) \in R^{n\times n},\ B_0,\ B_1(x) \in R^{n\times r}$, μ_0 – некоторое заданное число, $X \subset R^n$ – некоторое заданное ограниченное замкнутое множество пространства состояний.

Требуется найти такое управление $u(x,\mu)$ для некоторой области изменения $0 < \mu \le \mu_0$, чтобы нулевое положение равновесия в замкнутой системе, отвечающей (1) было локально асимптотически устойчиво по Ляпунову. При этом предполагается, что правые части соответствующей замкнутой системы, получающейся при подстановке управления $u(x,\mu)$, непрерывны, ограниченны в выпуклой области $X \subset R^n$ и обеспечивают существование и единственность решения этой замкнутой системы.

Будем строить управление $u(x,\mu)$, используя критерий

$$I(u) = \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{\infty}(x^T Q(x,\mu)x + u^T R_0 u) \to \min, \tag{2}$$

где $Q(x,\mu) \in R^{n\times n},\ R_0 \in R^{r\times r}$, $Q(x,\mu) \ge 0$, а $R_0 > 0$ – постоянная матрица и при этом матрицы критерия (2) выбираются так, чтобы итоговый регулятор был стабилизирующим в (1).

Будем искать управление в виде нелинейной обратной связи по состоянию, которая подсказывается формой оптимального синтеза в формально линейно квадратичной задаче Калмана-Летова, получающейся из (1), (2) при $\mu = 0$

$$u(x,\mu) = -\left[R_0 + B(x(t),\mu)^T P(x(t),\mu)B(x(t),\mu)\right]^{-1} B(x(t),\mu)^T P(x(t),\mu)A(x(t),\mu)x(t). \tag{3}$$

Предлагаемый алгоритм построения нелинейных стабилизирующих регуляторов для (1), (2) основан на решении при всех допустимых значениях x,μ дискретного матричного уравнения Риккати

$$A^T(x,\mu)PA(x,\mu) - P - A^T(x,\mu)PB(x,\mu)\tilde{R}(x,\mu)^{-1}B^T(x,\mu)PA(x,\mu) + Q(x,\mu) = 0, \tag{4}$$

где $\tilde{R}(x,\mu) = (R_0 + B^T(x,\mu)PB(x,\mu))$. Заметим, что (4) справедливо, если матрица $\tilde{R}(x,\mu)$ обратима при допустимых x,μ.

Будем искать P в виде формального степенного ряда по параметру μ, а именно, будем строить формальное асимптотическое приближение $2-$го порядка.

$$P^2(x,\mu) = P_0 + \mu P_1(x) + \mu^2 P_2(x). \tag{5}$$

При этом матрица $Q(x,\mu)$ также подбирается в виде ряда $Q^2(x,\mu) = Q_0 + \mu Q_1(x) + \mu^2 Q_2(x)$, где $Q_0 \ge 0 -$ постоянная матрица.

Соответствующий регулятор $2-$го порядка имеет вид

$$u^2(x,\mu) = -\left[R_0 + B(x(t),\mu)^T P^2(x,\mu)B(x(t),\mu)\right]^{-1} B(x(t),\mu)^T P^2(x,\mu)A(x(t),\mu)x(t). \tag{6}$$

Для нахождения P_0 получаем уравнение Риккати

$$A_0{}^T P_0 A_0 - P_0 - A_0{}^T P_0 B_0 (R_0 + B_0{}^T P_0 B_0)^{-1} B_0{}^T P_0 A_0 + Q_0 = 0. \tag{7}$$

Обозначим матрицу $\tilde{R}_0 = R_0 + B_0{}^T P_0 B_0$, тогда для членов разложения при μ^1 получаем дискретное уравнение Ляпунова

$$A_{cl,0}^T P_1(x)A_{cl,0} - P_1(x) = -C_1(x), \tag{8}$$

где $A_{cl,0} = A_0 - B_0\tilde{R}_0^{-1}B_0^T P_0 A_0$,

$$C_1(x) = A_0{}^T P_0 A_1(x) + A_1{}^T(x)P_0 A_0 - A_0{}^T P_0 B_1(x)\tilde{R}_0{}^{-1}B_0{}^T P_0 A_0 - A_0{}^T P_0 B_0 \tilde{R}_0{}^{-1}B_1{}^T(x)P_0 A_0 - A_1{}^T(x)P_0 B_0 \tilde{R}_0{}^{-1}B_0{}^T P_0 A_0 -$$
$$-A_0{}^T P_0 B_0 \tilde{R}_0{}^{-1}B_0{}^T P_0 A_1(x) + A_0{}^T P_0 B_0 \tilde{R}_0{}^{-1}B_0{}^T P_0 B_1(x)\tilde{R}_0{}^{-1}B_0{}^T P_0 A_0 + A_0{}^T P_0 B_0 \tilde{R}_0{}^{-1}B_1{}^T(x)P_0 B_0 \tilde{R}_0{}^{-1}B_0{}^T P_0 A_0 + Q_1(x).$$

Аналогично, можно получить соотношения для нахождения следующих членов разложения, в частности, для $P_2(x)$ получаем также уравнение Ляпунова

$$A_{cl,0}^T P_2(x)A_{cl,0} - P_2(x) = -C_2(x), \tag{9}$$

где

$$C_2(x) = A_0^T P_1(x) A_1(x) + A_1^T(x) P_0 A_1(x) + A_1^T(x) P_1(x) A_0 - A_0^T P_0 B_0 \tilde{R}_0^{-1} [B_0^T P_1(x) A_1(x) + B_1^T(x) P_0 A_1(x) + B_1^T(x) P_1(x) A_0] +$$
$$+ A_0^T P_0 B_0 \tilde{R}_0^{-1} [B_0^T P_1(x) B_1(x) + B_1^T(x) P_0 B_1(x) + B_1^T(x) P_1(x) B_0 + [B_0^T P_0 B_1(x) + B_0^T P_1(x) B_0 + B_1^T(x) P_0 B_0] \times$$
$$\times [B_0^T P_0 B_1(x) + B_0^T P_1(x) B_0 + B_1^T(x) P_0 B_0] \tilde{R}_0^{-1}] \tilde{R}_0^{-1} B_0^T P_0 A_0 - [A_0^T P_1(x) B_1(x) + A_1^T(x) P_0 B_1(x) + A_1^T(x) P_1(x) B_0] \tilde{R}_0^{-1} B_0^T P_0 A_0 +$$
$$+ A_0^T P_0 B_0 \tilde{R}_0^{-1} [B_0^T P_0 B_1(x) + B_0^T P_1(x) B_0 + B_1^T(x) P_0 B_0] \tilde{R}_0^{-1} [B_0^T P_0 A_1(x) + B_0^T P_1(x) A_0 + B_1^T(x) P_0 A_0] -$$
$$- [A_0^T P_0 B_1(x) + A_0^T P_1(x) B_0 + A_1^T(x) P_0 B_0] \tilde{R}_0^{-1} [B_0^T P_0 A_1(x) + B_0^T P_1(x) A_0 + B_1^T(x) P_0 A_0] +$$
$$+ [A_0^T P_0 B_1(x) + A_0^T P_1(x) B_0 + A_1^T(x) P_0 B_0] \tilde{R}_0^{-1} [B_0^T P_0 B_1(x) + B_0^T P_1(x) B_0 + B_1^T(x) P_0 B_0] \tilde{R}_0^{-1} B_0^T P_0 A_0 + Q_2(x).$$

Нетрудно видеть, что $C_j(x), j = 1,2 -$ симметричные матрицы, если $Q_1(x), Q_2(x) -$ симметричны.

Введем условия

I. Тройка матриц $(A_0, B_0, Q_0^{\frac{1}{2}})$ управляема и наблюдаема.

II. Коэффициенты матриц $A_1(x),\ B_1(x),\ Q_1(x), ..., Q_j(x),\ \ j = 1,2,...,k$ – непрерывно дифференцируемые функции на X, $v(0,\mu) \equiv 0 \quad (v = A_{cl}(x(t),\mu)x(t))$, и параметр μ принимает значения из некоторого ограниченного интервала $(0,\mu_0]$.

III. Пусть существуют $Q_j(x) > 0,$ такие, что $C_j(x),\ j = 1,2$ – положительно определенные матрицы $\forall x \in X$.

2 Паде регулятор и экстраполяция

В работах [4-10] для непрерывных и дискретных управляемых систем строились одноточечные и двухточечные Паде аппроксимации (ПА) для матрицы коэффициентов усиления в регуляторе на основе асимптотики решения соответствующих уравнений типа Риккати и при этом получались системы матричных уравнений для нахождения матриц коэффициентов ПА.

Для понижения числа неизвестных матриц коэффициентов ПА здесь используем экстраполяцию Ричардсона [15] для получения более простого представления асимптотического приближения (5) того же порядка. Для этого рассчитывается линейная комбинация асимптотического приближения при разных значениях параметра,

$$\widehat{P}(x,\mu_1,\mu_2) = \alpha_1 P^2(x,\mu_1) + \alpha_2 P^2(x,\mu_2),\ \mu_2 = d\mu_1,\ 0 < d < 1,$$

где

$$\alpha_1 P^2(x,\mu_1) = \alpha_1 P_0 + \alpha_1 \mu_1 P_1(x,t) + \alpha_1 \mu_1^2 P_2(x,t),$$
$$\alpha_2 P^2(x,\mu_2) = \alpha_2 P_0 + d\alpha_2 \mu_1 P_1(x,t) + d^2 \alpha_2 \mu_1^2 P_2(x,t).$$

Отсюда получаем $\widehat{P}(x,\mu_1) = (\alpha_1 + \alpha_2) P_0 + (\alpha_1 + d\alpha_2)\mu_1 P_1(x) + (\alpha_1 + d^2\alpha_2)\mu_1^2 P_2(x)$. На коэффициенты линейной комбинации наложим следующие условия

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$$
$$\alpha_1 + d\alpha_2 = 0,$$

что приводит к упрощенному экстраполированному приближению $P^2(x,\mu)$ при малых значениях параметра, содержащее уже только два члена

$$P^2(x,\mu) = P_0 + (\alpha_1 + d^2\alpha_2)\mu^2 P_2(x), \tag{10}$$

где параметр $d \in (0,1)$ фиксированный.

Далее будем строить одноточечную аппроксимацию Паде порядка 1/2 вида

$$PA_{[1/2]}(x,\mu) = (\mathrm{M}_0(x) + \mu \mathrm{M}_1(x)) \times \left(E + \mu \mathrm{N}_1(x) + \mu^2 \mathrm{N}_2(x)\right)^{-1}, \tag{11}$$

где неизвестные матричные коэффициенты $\mathrm{M}_0(x), \mathrm{M}_1(x), \mathrm{N}_1(x), \mathrm{N}_2(x)$ находятся из уравнения

$$\mathrm{M}_0(x) + \mu \mathrm{M}_1(x) = P_0(x) + \mu P_0(x) \mathrm{N}_1(x) + \mu^2 P_0(x) \mathrm{N}_2(x) + (\alpha_1 + d^2\alpha_2)\mu^2 P_2(x) +$$
$$+ \mu^3 (\alpha_1 + d^2\alpha_2) P_2(x) \mathrm{N}_1(x) + \mu^4 (\alpha_1 + d^2\alpha_2) P_2(x,t) \mathrm{N}_2(x)$$

с помощью приравнивания членов при одинаковых степенях параметра

$\mathrm{M}_0(x) = P_0(x)$

$\mathrm{M}_1(x) = P_0(x)\mathrm{N}_1(x)$

$0 = P_0(x)\mathrm{N}_2(x) + (\alpha_1 + d^2\alpha_2)P_2(x)$

$0 = (\alpha_1 + d^2\alpha_2)P_2(x)\mathrm{N}_1(x)$

$0 = (\alpha_1 + d^2\alpha_2)P_2(x)\mathrm{N}_2(x).$

Итоговая система для нахождения неизвестных матриц в (11) принимает вид

$\mathrm{M}_0(x) = P_0$

$\mathrm{N}_2(x) = -(\alpha_1 + d^2\alpha_2)P_0^{-1}P_2(x)$

$\mathrm{M}_1(x) = 0$

$\mathrm{N}_1(x) = 0.$

Так как часть коэффициентов ($\mathrm{M}_1(x), \mathrm{N}_1(x)$) оказалась равна нулю, то мы приходим к экстраполированной одноточечной аппроксимации Паде порядка [0/2]. Вместо 4 уравнений для 4 неизвестных матричных коэффициентов (двух в «числителе» и двух в условном «знаменателе») в результате применения экстраполяции получаем линейную систему из двух матричных уравнений для двух неизвестных матриц коэффициентов Паде [0/2]. При этом «числитель» является постоянной матрицей, а в «знаменателе» только одна неизвестная матрица, зависящая от x

$$PA_{[0/2]}^{extr}(x,\mu) = P_0 \times \left(E + \mu^2\mathrm{N}_2(x)\right)^{-1}. \qquad (12)$$

Отметим, что аналогичный прием был применен для непрерывных нелинейных систем с параметром при управлении, для которых была построена двухточечная ПА порядка [2/2] для регуляторов на конечном и бесконечном интервалах изменения времени и параметра [4, 6, 9-10]. Для построения двухточечной аппроксимации Паде, в отличие от этих работ, здесь в дискретном случае не используется вторая асимптотика в окрестности больших значений параметра по обратным степеням параметра, поэтому двухточечная Паде аппроксимация «мост» здесь не появляется.

Теперь подбирая матрицу $Q(x,\mu)$ так, чтобы входящие в уравнения матрицы $P_0, P_0^{-1}, P_2(x)$ существовали, а также существовала обратная матрица в знаменателе Паде $\left(E + \mu^2\mathrm{N}_2(x)\right)^{-1}$ получаем следующее управление

$$u^2(x,\mu) = -\left[R_0 + B(x(t),\mu)^T K_{[0/2]}^{\text{extr}}(x,\mu) B(x(t),\mu)\right]^{-1} B(x(t),\mu)^T K_{[0/2]}^{\text{extr}}(x,\mu) A(x(t),\mu)x(t),$$

$$K_{[0/2]}^{\text{extr}}(x,\mu) = \frac{1}{2}\left(PA_{[0/2]}^{\text{extr}}(x,\mu) + \left(PA_{[0/2]}^{\text{extr}}(x,\mu)\right)^T\right),$$

где $K_{[0/2]}^{\text{extr}}(x,\mu)$ - симметричная положительно определенная матрица. $PA_{[0/2]}^{\text{extr}}(x,\mu)$ – построенная Паде аппроксимация.

3 Численные эксперименты

Рассмотрим результаты построения Паде регуляторов на примере модели грузоподъёмного крана мостового типа [16]. Здесь x - положение тележки, θ-угол наклона стержня, l-длина стержня, M - масса тележки, m-масса полезной нагрузки, $u(t)$ - сила, приложенная к тележке, g – ускорение свободного падения, T_s – время дискретизации. Параметры модели $T_s = 0.05\,сек$, $M = 0.4\,кг$, $m = 1.6\,кг$, $l = 0.4\,м$, $g = 9.8\ м/сек^2$. Начальное условие: $x(0) = \begin{pmatrix}1.5 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$. Матрицы системы имеют вид

$x_1 = x,\ x_2 = \theta,\ x_3 = \dot{x},\ x_4 = \dot{\theta}.$ $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & T_s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T_s \\ 0 & \dfrac{T_s Mg \sin x_2 \cos x_2}{(M + m - M\cos^2 x_2)x_2} & 1 & \dfrac{T_s M\, lx_4 \sin x_2}{(M + m - M\cos^2 x_2)} \\ 0 & \dfrac{T_s Mlx_4^2 \sin x_2 \cos x_2 - T_s(m+M)g \sin x_2}{l(M + m - M\cos^2 x_2)x_2} & 0 & 1 \end{pmatrix},$

$B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{T_s}{M + m - M\cos^2 x_2} \\ \dfrac{T_s \cos x_2}{l(M + m - M\cos^2 x_2)} \end{pmatrix}.$ Выбрана следующая факторизация матриц системы

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & \dfrac{TMg}{m} & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{-T(m+M)g}{lm} & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{T}{m} \\ \dfrac{T}{lm} \end{pmatrix},\ A_1(x) = \frac{1}{\mu}\left(A(x) - A_0\right),\ B_1(x) = \frac{1}{\mu}\left(B(x) - B_0\right).$$

Матрицы критерия подобраны следующим образом.

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ Q_1(x) = \begin{pmatrix} 30 & 10 & 0 & 0 \\ 10 & 2000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 130 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 130 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} x_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4^2 \end{pmatrix},$$

$$Q_2(x) = E + 0.1 \begin{pmatrix} x_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4^2 \end{pmatrix}, R_0 = 1.$$

Для сравнения строятся линейный регулятора, D-SDRE регулятор, регулятор на основе асимптотик второго порядка, регулятор Паде [0/2] с экстраполяцией и регулятор Паде [1/2].

На рис. 1 представлены траектории замкнутой системы для координат x_1, x_2 при μ=0.03 вдоль D-SDRE регулятора, линейного регулятора и регулятора Паде [0/2] с экстраполяцией.

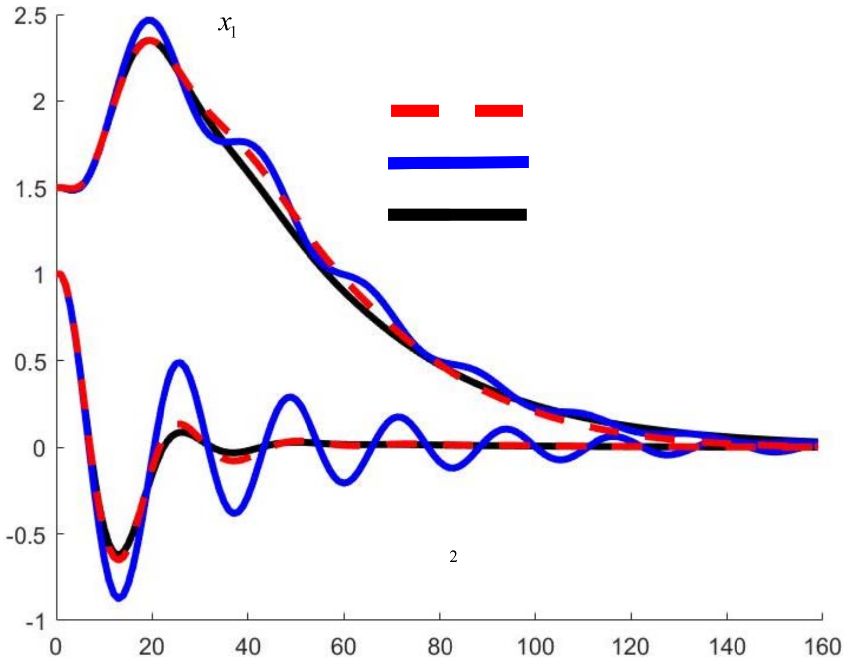

Рис. 1. Траектории замкнутой системы для x_1, x_2 при μ=0.03

Также проведено сравнение регуляторов по значению критерия качества при разных значениях параметра. С ростом μ, как видно из табл.1, значение критерия вдоль регулятора Паде [0/2] с экстраполяцией, Паде [1/2] и регулятора вдоль асимптотики значительно лучше соответствующего значения критерия вдоль линейного регулятора. Несмотря на то, что при очень малых μ асимптотика приближается к точному решению, тем не менее, регулятор Паде [0/2] с экстраполяцией обеспечивает это приближение с еще большей точностью (см. табл.1 и рис. 2).

Таблица 1. Значения критерия вдоль регуляторов при разных значениях параметра

Параметр μ	D-SDRE регулятор	Линейный регулятор	Паде [0/2] с экстраполяцией	Паде [1/2]	Асимптотика
0,01	1940,9	5129,0	1685,0	1815,3	1832,5
0,02	3168,2	6760,9	2164,6	2406,0	2298,3
0,03	4444,8	8901,6	2575,9	2874,9	2747,7
0,04	7796,0	15602,4	3004,8	3310,3	3240,6
0,05	33855,6	131850,3	3909,9	3751,1	3973,8

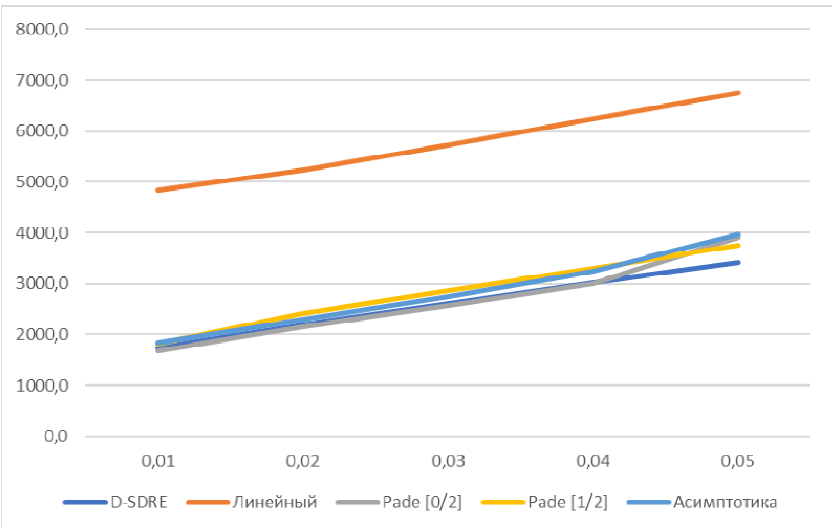

Рис. 2. Значения критерия вдоль регуляторов при разных значениях параметра

Следующий эксперимент проводился при разных начальных условиях $x(0) = \begin{pmatrix} 1.5 & x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$, а именно, фиксировались все координаты x_0 кроме угла отклонения x_2, который изменялся на интервале [0.01, 1.2] при μ =0.03. Результаты эксперимента приведены на рис. 3, где демонстрируется, что с ростом начального угла отклонения стержня значение критерия вдоль регулятора Паде [0/2] с экстраполяцией значительно меньше, чем соответствующие значения критерия вдоль линейного регулятора, т.е. отношение значения критерия для Паде регулятора к значению критерия для линейного регулятора меньше единицы и падает с ростом начальных возмущений. Этот эффект достигается за счет учета нелинейности регулятором Паде и его экстраполяционным свойствам.

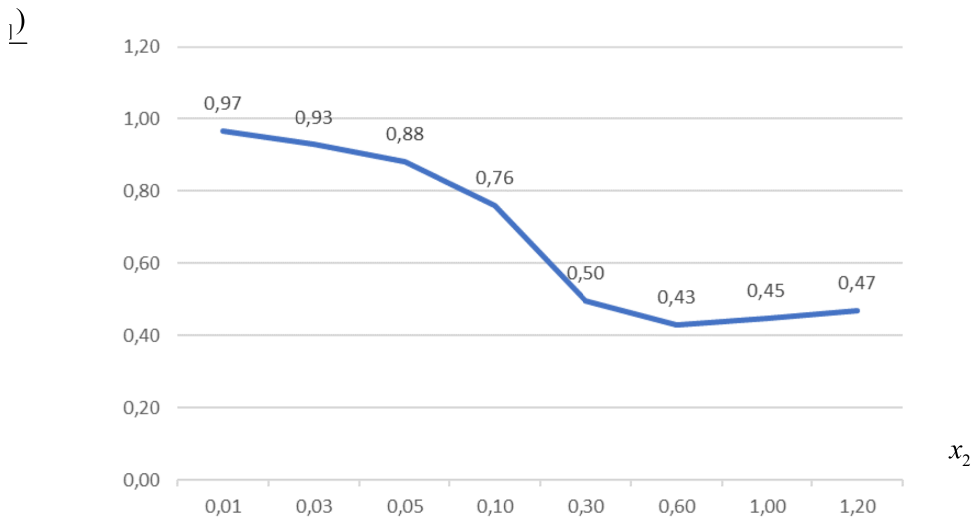

Рис. 3. Отношение значений критериев вдоль регулятора Паде [0/2] с экстраполяцией и линейного регулятора при росте отклонения x_2

Заключение

Построена одноточечная матричная Паде аппроксимация (ПА) для решения матричного разностного уравнения Риккати на основе регулярного асимптотического приближения и предложен соответствующий регулятор на ее основе для дискретной слабо нелинейной системы с параметром при нелинейности. При этом была использована процедура экстраполяции Ричардсона, которая позволила значительно упростить систему для нахождения коэффициентов ПА и обеспечить более высокую точность приближения, чем исходное асимптотическое разложение.

Литература

1. *Çimen T.* Systematic and effective design of nonlinear feedback controllers via the State-Dependent Riccati Equation (SDRE) method // Annual Reviews in control. Vol. 34. 2010, № 1. – P.32-51.
2. *Dutka A.S., Ordys A.W., Grimble M.J.* Optimized discrete-time state dependent Riccati equation regulator // Proceedings of the American Control Conference. IEEE. 2005. – P.2293-2298.
3. *Danik Yu.* One D-SDRE regulator for weakly nonlinear discrete state dependent coefficients control systems // The 7th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CODIT 2020). 2020. – P.616-621.
4. *Danik Yu. E., Dmitriev M. G.* Construction of Parametric Regulators for Nonlinear Control Systems Based on the Pade Approximations of the Matrix Riccati Equation Solution // IFAC-PapersOnLine. Vol. 51. 2018. – P.815-820.
5. *Danik Y., Dmitriev M.* Stabilizing Regulator for Nonlinear Discrete Weakly Coupled Systems Based on the Pade Approximation // 2019 Twelfth International Conference" Management of large-scale system development"(MLSD). IEEE. 2019. – P.1-4.
6. *Danik Yu., Dmitriev M.* Symbolic Padé representation of stabilizing regulators for a class of nonlinear control systems with a parameter // 14th International Symposium «Intelligent Systems», INTELS'20, 14-16 December 2020, Moscow, Russia. – P.1-8.
7. *Danik Yu. E., Dmitriev M. G.* The construction of stabilizing regulators sets for nonlinear control systems with the help of Pade approximations // Nonlinear Dynamics of Discrete and Continuous Systems. Springer International. 2021. – P.45-62.

8. *Danik Yu.E., Dmitriev M.G.* Feedback Control Algorithms for Some Classes of Nonlinear Systems with a Parameter at Finite Interval // 2021 14th International Conference Management of large-scale system development (MLSD). 2021. – P.451-5.
9. *Danik Yu.E., Dmitriev M.G.* Modified Pade regulator for nonlinear SDC systems on a finite time interval // International Conference on Dynamical Systems: Theory and Applications, DSTA 2021. Lodz, Poland, 6-9 December 2021. – P.243-244.
10. *Danik Y., Dmitriev M.* Symbolic Regulator Sets for a Weakly Nonlinear Discrete Control System with a Small Step // Mathematics. Vol. 10. 2022, №. 3. – P.1-14.
11. *Первозванский А.А., Гайцгори В.Г.* Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация. – М.: Наука. 1979. – 344 с.
12. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управлен ия. – М.: Высш шк. 1998. – 574 с.
13. *Дмитриев М.Г., Курина Г.А.* Сингулярные возмущения в задачах управления. Обзор 1982-2004 гг. // Автоматика и телемеханика. 2006, № 1. – С.35-38.
14. *Kokotovic P.V., Khalil H.K. (eds.).* Singular perturbations in systems and control. – New York: IEEE PRESS. 1986.
15. *Марчук Г.И., Шайдуров В.В.* Повышение точности решений разностных схем. – Наука. 1979.
16. *Omidi E.* Modeling and Nonlinear Control of Gantry Crane Using Feedback Linearization Method // arXiv preprint arXiv: 1405.5926. 2014.