

РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ГЛУБОКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СУСПЕНЗИИ

Кушнер А.Г., Мухина С.С.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,

Россия, г. Москва ул. Профсоюзная д.65

kushner@physics.msu.ru, sveta.mukhina.1998@mail.ru

Аннотация: в работе приводится решение начально-краевой задачи для модели одномерной глубокой фильтрации суспензии в недеформируемом поровом пространстве для случая линейного коэффициента захвата частиц. Результаты проиллюстрированы графиками. Сделаны выводы о характере движения частиц в пористой среде.

Ключевые слова: фильтрация суспензии, фильтрация в пористой среде, точные решения, начально-краевые условия, моделирование движения частиц.

Введение

В работе рассматривается задача одномерной фильтрации суспензии в однородной недеформируемой пористой среде (так называемой «deep-bed filtration»). Суспензия состоит из двух фаз: дисперсионной среды – жидкость, и дисперсной фазы – твердые взвешенные частицы. Пористая среда – материал, содержащий соединенные между собой пустоты. То есть фильтрация суспензии представляет из себя движение жидкости со взвешенными твердыми частицами в порах грунта, при этом сама пористая среда изменяет свои физические свойства с течением времени.

Задача переноса твердых частиц в потоке жидкости через пористую среду изучается достаточно давно, так как является актуальной задачей во многих областях, например, в нефтяной, химической, горнодобывающей, экологической и пищевой промышленности. В нефтяной промышленности дисперсионные системы применяются при борьбе с заиливанием нагнетательных скважин, для очистки нефтяного пласта с помощью компонент бурового раствора, при изучении миграции мелких частиц при вторичной и третичной добыче. В химической промышленности это очистка с помощью песчаных и других фильтров промышленной и питьевой воды. Под фильтром понимается сама пористая среда, по которой движется жидкость. В геологической отрасли – борьба с вымыванием мелких частиц из-под основания гидротехнических сооружений. В зависимости от цели фильтрации, бывает важно либо сама фильтрация частиц гранулированными средами, либо, наоборот, избегание фильтрации частиц.

Чтобы гарантировать качество системы, очищаемой фильтром, необходимо понимать основные законы фильтрации. А именно, необходимо знать, как происходит задержание частиц фильтровальным элементом, как переносятся частицы, как изменяются свойства фильтра. Удержанные твердые частицы в порах изменяют физические свойства пор, а именно пористость, проницаемость, локальный градиент давления. Такие изменения называются фильтрационными деформациями грунта. Изменение морфологии пористой среды может привести к снижению проницаемости и к потере пластовой энергии.

В работе [1] для феноменологической модели фильтрации [2], описывающей общее поведение процесса, с помощью контактных преобразований было построено общее точное решение уравнений фильтрации суспензии. Это позволяет решить начально-краевую задачу для таких уравнений и качественный и количественный анализ процесса фильтрации суспензии в пористой среде.

1 Моделирование фильтрации суспензии

1.1 Начально-краевая задача

Модель фильтрации суспензии, согласно феноменологическому подходу, можно описать с помощью системы уравнений в частных производных первого порядка, включающей в себя уравнение неразрывности и уравнение для скорости захвата частиц [3,4].

Существует несколько способов захвата частиц, а именно путем формирования внешней и внутренней фильтрационной корки. Особенность внутренней фильтрационной корки состоит в том, что размеры частиц значительно меньше размеров самих пор, так что частицы свободно проникают внутрь. В свою очередь, внутренняя фильтрационная корка бывает обратимой и необратимой. В данной работе мы рассматриваем необратимый процесс осадкообразования – так называемый процесс коагуляции пор.

Заметим, что линейные размеры пористой среды значительно больше характерных размеров самих пор. Поэтому при решении задач такого рода, используют осредненные характеристики, что позволяет рассматривать пористую среду как сплошной материал, характеристики которой получаются в результате осреднения по некоторой окрестности, содержащей достаточно большое число пор.

Процесс кольтации описывается следующей системой двух дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} - h(v)u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = h(v)u, \end{cases} \quad (1)$$

где t – время, x – пространственная координата (ось Ox направлена в сторону движения флюида), $u(t,x)$ – объемная концентрация взвешенных частиц в суспензии, $v(t,x)$ – доля осажденных частиц, $h(v)$ – коэффициент захвата частиц, выражающий вероятность захвата частицы по длине фильтра.

Данная система получена с помощью следующих допущений:

- скорость частиц совпадает со скоростью несущей жидкости и равна единице;
- влияние концентрации суспензии на ее вязкость не учитываются;
- пористость пространства постоянны и равна единице;
- частицы достаточно большие, поэтому диффузионным движение жидкости пренебрегается; жидкость и частицы несжимаемы.

Чтобы определить значения всех насыщенностей, пористости, градиента давления достаточно получить значения объемной концентрации взвешенных и осажденных частиц как функции от координат и времени.

В работе [1] для линейного коэффициента захвата частиц $h(v)=\alpha v+\beta$, с помощью метода контактных преобразований [5], система (1) была приведена к волновому уравнению. Это позволило найти общее её решение:

$$\begin{cases} u(t,x) = \frac{A'(t-x)}{\alpha B\left(\frac{-x}{\alpha}\right) - \alpha A(t-x)}, \\ v(t,x) = \frac{-\alpha\beta A(t-x) + \alpha\beta B\left(\frac{-x}{\alpha}\right) + B'\left(\frac{-x}{\alpha}\right)}{\alpha^2\left(A(t-x) - B\left(\frac{-x}{\alpha}\right)\right)}, \end{cases} \quad (2)$$

где A, B – произвольные дважды дифференцируемые функции.

Пусть в начальный момент времени концентрация взвешенных и осажденных частиц имела вид:

$$u|_{t=0} = U(x), \quad v|_{t=0} = V(x), \quad (3)$$

а граничное условие на концентрацию взвешенных частиц в суспензии – вид

$$u(t,x)|_{x=0} = u_0(t). \quad (4)$$

Выберем коэффициент захвата частиц вида $h(v) = v$ и тогда начальные условия примут вид:

$$\begin{cases} \frac{-A'(x)}{A(x)-B(x)} = U(x), \\ \frac{B'(x)}{A(x)-B(x)} = V(x). \end{cases} \quad (5)$$

Сложив уравнения системы (5) и сделав замену $P(x) = A(x)-B(x)$, получим

$$P'(x) = -P(x)(U(x) + V(x)), \quad P = C e^{-\int U(x)+V(x)dx}, \quad C = A(0) - B(0) \quad (6)$$

Поэтому функции A, B имеют вид

$$A(x) = -C \int U(x) e^{-\int V(\tau)+U(\tau)d\tau} dx + A(0), \quad B(x) = C \int V(x) e^{\int V(\tau)+U(\tau)d\tau} dx + B(0) \quad (7)$$

1.2 Моделирование процесса фильтрации

Для иллюстрации выберем следующие граничные условия: $U(x)=0.3-0.3x$ и $V(x)=0.07-0.07x$, в начальный момент времени концентрация взвешенных и осажденных частиц в пористой среде имеют профиль, представленный на рис.1.

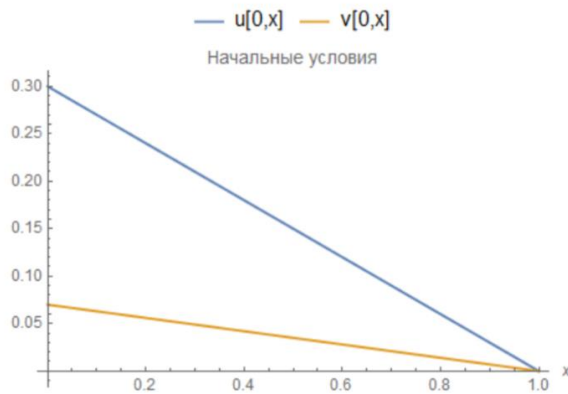


Рис. 1. Начальные условия

Тогда с течением времени $t > 0$ концентрация взвешенных и осажденных частиц изменяются согласно рис. 2.

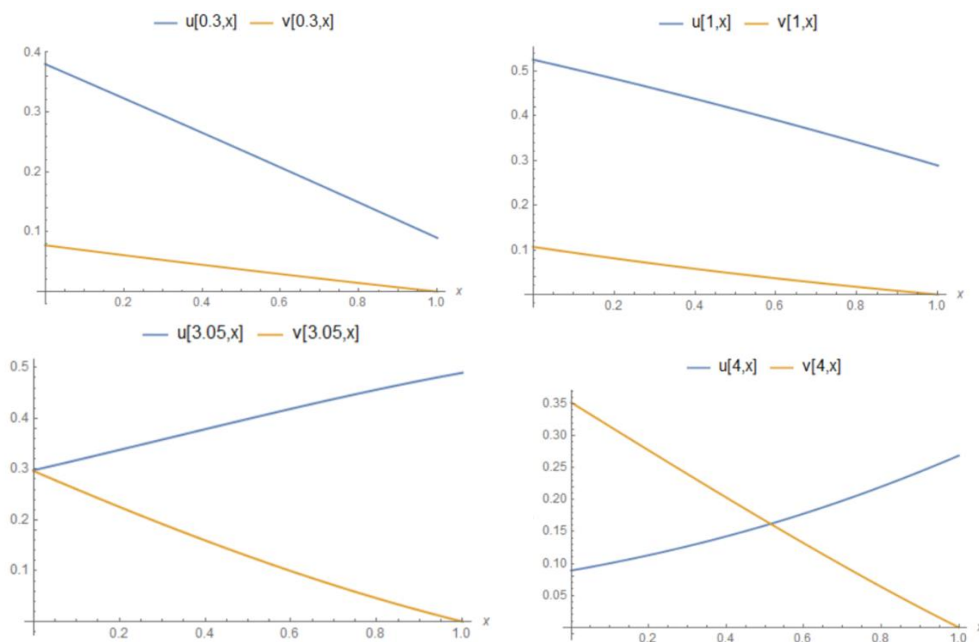


Рис. 2. Эволюция фильтрации суспензии в пористой среде

На границе $x=0$ взвешенные и захваченные частицы имеют вид рис. 3.

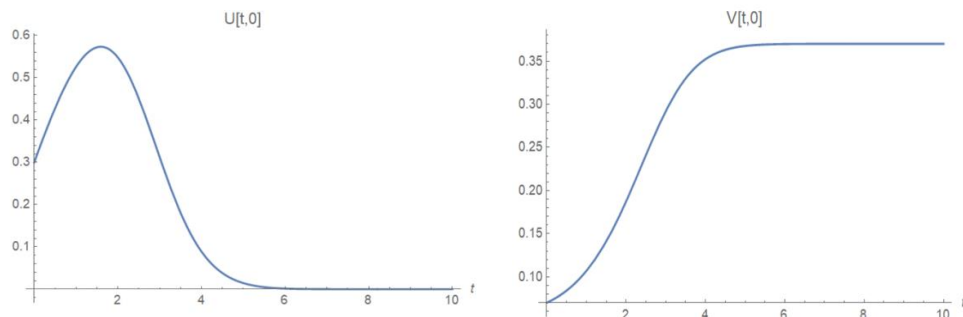


Рис. 3. Профили частиц на границе

Из рис. 2 – рис. 3 видно, что с течением времени объемная концентрация взвешенных частиц в суспензии уменьшается, а концентрация осажденных частиц, наоборот, сильно увеличивается. В пористой среде формируется внутренняя фильтрационная корка, которая ухудшает фильтрационно-емкостные свойства пласта. Проницаемость среды уменьшается по отношению к природному состоянию пласта, то есть поры забиваются осадком и уже не способны пропускать с прежней интенсивностью суспензию.

Заключение

В работе рассмотрена начально-краевая задача для системы в частных производных, описывающей глубокую фильтрацию суспензии в пористой среде. Произведено моделирование процесса осадкообразования, сделан необходимый анализ о характере течения дисперсионной системы и об изменениях, к которым приводит процесс захвата частиц пористой средой.

Литература

1. *Кушнер А.Г., Мухина С.С., Файзуллина Э.Р.*, Точные решения уравнений фильтрации суспензии // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование. - 2022. - №4. - С. 60-61.
2. *Шехтман Ю.М.*, Фильтрация малоцентрированных суспензий. М.: Изд-во АН СССР, 1961. 212 с.
3. *Herzig J.P., Leclerc D.M., and Le Goff P.*, Flow of Suspensions through Porous Media – Application to Deep Filtration, Ind. Eng. Chem. 62(5), p. 8–35, (1970).
4. *T. Iwasaki*, Some notes on sand filtration, J. Am. Water Works Assoc. 29, 1591–1602 (1937).
5. *Kushner A.G., Lychagin V.V., Rubtsov V.N.*, Contact geometry and nonlinear differential equations, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, 101. Cambridge University Press, Cambridge, 2007, xxii+496 pp.