DOI: 10.25728/mlsd.2022.0613

О СЛАБЫХ РЕШЕНИЯХ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ЗАМКНУТЫХ МНОГООБРАЗИЯХ[1]

Туницкий Д.В.
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
Россия, г. Москва ул. Профсоюзная д.65
dtunitsky@yahoo.com

Аннотация: Статья посвящена вопросам существования, единственности и регулярности слабых решений одного класса полулинейных параболических дифференциальных уравнений второго порядка на замкнутых многообразиях. Эти уравнения являются неоднородными аналогами уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова–Фишера и имеют важное значение для изучения разнообразных процессов реакции – диффузии.

Ключевые слова: уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова–Фишера, параболические уравнения второго порядка, полулинейные уравнения на многообразиях, слабые решения.

Введение

Параболические уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f(x,u), \tag{1}$$

где

$$Lu = -\sum_{l,i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^l}\left(a^{l,i}(x)\frac{\partial u}{\partial x^i}\right) \tag{2}$$

– эллиптический линейный дифференциальный оператор второго порядка, широко используются при математическом моделировании разнообразных процессов реакции – диффузии. Эта тематика представляет значительный интерес и ей посвящено значительное количество работ, среди которых, прежде всего, следует назвать знаменитые статьи А.Н. Колмогорова, Г.И. Петровского и Н.С. Пискунова [1] и Р.А. Фишера [2] , в которых изучается случай однородных оператора L и правой части f:

$$L = -\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2}{(\partial x^l)^2}, \qquad f(x,q) = f(q).$$

Упомянем также статью [3], в которой содержится информация по истории и библиографии работ, посвященных уравнениям (1)–(2), и монографию [4], в которой приведен ряд приложений этих уравнений к биологии.

В [3] изучаются уравнения (1)–(2) с оператором L, имеющим периодические коэффициенты. Этот случай сводится к уравнениям на -мерном торе $\mathbb{T}^n$, и представляет значительный интерес с прикладной точки зрения. Большое значение имеют аналоги уравнений (1), (2) и на других замкнутых многообразиях, в частности, на многообразиях, диффеоморфных -мерной сфере $\mathbb{S}^n$.

В ряде прикладных задач правые части уравнений (1)–(2) могут содержать члены, которые не являются непрерывными. Например, такая ситуация характерна для задач управления. Поэтому желателен выбор такого класса допустимых решений, который позволял бы построить удовлетворительную теорию разрешимости рассматриваемых уравнений при минимальных требованиях на регулярность их коэффициентов. В качестве такого класса в данной работе выступают слабые решения. В этом классе удается исследовать решения аналогов неоднородного уравнения (1) на сферах при довольно низких требованиях на регулярность его коэффициентов. В частности, некоторые из этих коэффициентов могут быть обобщенными функциями.

1 Пространства тензорных полей

Пусть X – n-мерное гладкое замкнутое риманово многообразие, т.е. связное компактное

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-11-00223 – теорема 1) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-01-00610 а – теорема 2).*

многообразие без края с метрикой

$$g: TX \times TX \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Метрики, индуцированные на тензорных расслоениях

$$(TX)^{\otimes^i} \otimes (T^*X)^{\otimes^l}, \qquad i, l = 0,1,2, \ldots,$$

этого многообразия посредством g, будем обозначать той же буквой. Под $(TX)^{\otimes^0} \otimes (T^*X)^{\otimes^0}$ понимается тривиальное расслоение $X \times \mathbb{R}$,

$$(TX\,)^{\otimes^0} \otimes (T^*X)^{\otimes^0} = X \times \mathbb{R},$$

и

$$g(r, t) = rt, \qquad r, t \in \mathbb{R}.$$

Метрика g индуцирует на X меру $V = V_g$, в локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$

$$dV = \sqrt{g}\, dx^1 \ldots dx^n, \tag{1.1}$$

где

$$g = \det\left(g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right) \right),$$

и связность Леви – Чевита со взаимно-однозначно определяемым ею оператором ковариантного дифференцирования $\nabla = \nabla_g$.

Для заданных на X вещественнозначных функций u и v положим

$$\langle u, v \rangle = \int\limits_X u(x) v(x) dV, \qquad \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} u(x) = \inf_{\substack{S \subseteq X, \\ V(S) = 0}} \sup_{x \in X \setminus S} u(x).$$

С помощью метрики g и меры V обычным образом конструируются пространства функций $L^p(X)$ и тензорных полей $L^p\left((TX)^{\otimes^m} \otimes (T^*X)^{\otimes^l}\right)$ для $p \geq 1$ и $m, l = 0,1,2, \ldots$. Аналогично с привлечением ковариантного дифференцирования ∇ конструируются пространства Соболева $W^{k,p}(X)$ и $W^{k,p}\left((TX)^{\otimes^m} \otimes (T^*X)^{\otimes^l}\right)$ для $k = 0,1,2, \ldots$, и пространства Гельдера $C^{k,\alpha}(X)$ и $C^{k,\alpha}\left((TX)^{\otimes^m} \otimes (T^*X)^{\otimes^l}\right)$ для $0 < \alpha \leq 1$; см. [5; разд. 10.2.4], [6; § 1].

На касательном расслоении декартова произведения $[0, T) \times X$, где $T \in (0, +\infty]$, определена метрика

$$g_{[0,T)\times X}: T([0, T) \times X) \ni (\tau, \xi) \longmapsto \tau^2 + g_X(\xi, \xi) \in \mathbb{R}$$

и соответствующие ей мера $V_{g_{[0,T)\times X}}$ и ковариантное дифференцирование $\nabla_{g_{[0,T)\times X}}$, с помощью которых аналогичным образом конструируются функциональные пространства

$$L^p([0, T) \times X), \qquad L^p\left(\big(T([0, T) \times X)\big)^{\otimes^m} \otimes \big(T^*([0, T) \times X)\big)^{\otimes^l}\right),$$

и

$$W^{k,p}([0, T) \times X), \qquad W^{k,p}\left(\big(T([0, T) \times X)\big)^{\otimes^m} \otimes \big(T^*([0, T) \times X)\big)^{\otimes^l}\right),$$

а также

$$C^{k,\alpha}([0, T) \times X), \qquad C^{k,\alpha}\left(\big(T([0, T) \times X)\big)^{\otimes^m} \otimes \big(T^*([0, T) \times X)\big)^{\otimes^l}\right).$$

Если B – произвольное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_B$, то стандартным образом определяются банаховы пространства $L^p(T; B)$, $p \geq 1$, с нормами

$$\|q\|_{L^p(T;B)} = \left(\int\limits_0^T \|q(t)\|_B^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \ \ p \geq 1, \qquad \|q\|_{L^\infty(T;B)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t \in [0,T)} \|q(t)\|_B,$$

см. [7, гл. III, § 1], [8, гл. II, § 2]. Ясно, что $L^p\big(T; L^p(X)\big) = L^p([0, T) \times X)$, поэтому в нижеследующем изложении $q(t, \cdot)$ отождествляется с $q(t)$. Пространства $L^2\big(T; W^{1,2}(X)\big)$ и $W^{1,2}\big(T; L^2(X)\big)$ – гильбертовы со скалярными произведениями

$$\langle q,p\rangle_{L^2\left(T;W^{1,2}(X)\right)} = \int\limits_0^T \langle q(t),p(t)\rangle_{W^{1,2}(X)}dt,$$

$$\langle q,p\rangle_{W^{1,2}\left(T;L^2(X)\right)} = \int\limits_0^T (\langle q(t),p(t)\rangle + \langle q'(t),p'(t)\rangle)dt,$$

а их пересечение $L^2\big(T;W^{1,2}(X)\big)\cap W^{1,2}\big(T;L^2(X)\big)$ изометрично гильбертову пространству $W^{1,2}([0,T)\times X)$ со скалярным произведением

$$\langle q,p\rangle_{W^{1,2}([0,T)\times X)} = \int\limits_0^T \big(\langle q(t),p(t)\rangle + \langle dq(t),dp(t)\rangle_{L^2(T^*X)} + \langle q'(t),p'(t)\rangle\big)dt.$$

Для $T\in(0,+\infty]$ положим

$$W(T;X) = L^2\big(T;W^{1,2}(X)\big)\cap L^\infty\big(T;L^2(X)\big).$$

Это банахово пространство с нормой

$$\|q\|^2_{W(T;X)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T)}\langle q(t),q(t)\rangle + \int\limits_0^T \langle dq(t),dq(t)\rangle_{L^2(T^*X)}dt.$$

Как обычно, для всякого линейного полулокального подпространства $B\subseteq\mathcal{D}'([0,T)\times X)$ через B_{loc} обозначается наименьшее локальное подпространство $\mathcal{D}'([0,T)\times X)$, содержащее B, см. [9; разд. 10.1]. В частности, $L^2_{loc}([0,T)\times X)$ для $L^2([0,T)\times X)$, $L^\infty_{loc}([0,T)\times X)$ для $L^\infty([0,T)\times X)$ и $W_{loc}(T;X)$ для $W(T;X)$.

2 Эллиптические и параболические уравнения

Для краткости будем использовать сокращение *п.в.*, когда речь идет о выполнении каких-либо свойств почти всюду по мере V (1.1). Предположим, что наряду с g на римановом многообразии X задана еще одна метрика a. Пусть она измерима и существуют такие положительные числа a_0 и a_1, что п.в.

$$a_0 g(\eta,\eta)\le a(\eta,\eta)\le a_1 g(\eta,\eta) \tag{2.1}$$

при всех $\eta\in T^*X$. Рассмотрим операторы d_a^* и d_g^*, формально сопряженные с оператором внешнего дифференцирования d относительно метрик a и g соответственно, см. [10; гл. VIII, § 1]. В частности, $\langle a(du,v),1\rangle = \langle a(u,d_a^*v),1\rangle$ для всех дифференциальных -форм u и $(k+1)$-форм v, $k=0,1,\dots,n-1$, и если многообразие X ориентируемо, то $d_a^* = * \, d \, *$, где $* = *_a$ – оператор Ходжа, индуцированный метрикой a. Определим на функциях $u\in C^\infty(X)$ линейный дифференциальный оператор второго порядка

$$Lu = \Delta u + bu + d_g^*(uc), \tag{2.2}$$

где $\Delta = \Delta_a = d_a^*\circ d$ – *геометрический лапласиан* (*оператор Лапласа – де Рама*), см. [11; гл. IV, § 5], а b и c – измеримые и ограниченные относительно метрики g векторное поле и линейная дифференциальная форма на X. В локальных координатах $x^1,\dots,x^n$

$$Lu = -\frac{1}{\sqrt{a}}\sum_{l,m=1}^n \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{a}\,a\big(dx^l,dx^m\big)\frac{\partial u}{\partial x^m}\right) + \sum_{l=1}^n b\big(dx^l\big)\frac{\partial u}{\partial x^l}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{l,m=1}^n \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{g}\,g\big(dx^l,dx^m\big)uc\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)\right),$$

где $a = \det\left(a\left(\frac{\partial}{\partial x^m},\frac{\partial}{\partial x^l}\right)\right)$ и $g = \det\left(g\left(\frac{\partial}{\partial x^m},\frac{\partial}{\partial x^l}\right)\right)$; ср. с (2). В этом контексте условие (2.1) означает, что оператор (2.2) *равномерно эллиптичен* на многообразии X.

Рассмотрим функцию

$$f\colon X\times\mathbb{R}\ni(x,r)\mapsto f(x,r)\in\mathbb{R}, \tag{2.3}$$

которая удовлетворяет локальному условию Липшица по переменной u, т.е. для любого $r\in\mathbb{R}$ найдется такая положительная постоянная $\mu_0=\mu_0(r)$, что для $r_1,r_2\in[-r,r]$ п.в.

$$|f(\,\cdot\,,r_1)-f(\,\cdot\,,r_2)|\le\mu_0(r)|r_1-r_2|. \tag{2.4}$$

Слабым решением уравнения

$$Lu = f + d_g^* h, \tag{2.5}$$

где h – измеримая ограниченная линейная дифференциальная форма на многообразии X, называется такая функция $u \in W^{1,2}(X)$, что $f(\,\cdot\,,u) \in L^2(X)$ и

$$\mathcal{L}(u,v) = \langle f(\,\cdot\,,u), v\rangle + \langle h, dv\rangle_{L^2(T^*X)}$$

для всякой функции $v \in C^\infty(X)$, где $\mathcal{L}$ – непрерывная билинейная форма

$$\mathcal{L}: W^{1,2}(X) \times C^\infty(X) \ni (u,v) \mapsto \langle a(du,dv),1\rangle + \langle bu, v\rangle + \langle uc, dv\rangle_{L^2(T^*X)} \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Поскольку оператор L (2.2) эллиптичен, то эволюционное уравнение

$$\frac{\partial q}{\partial t} + Lq = f + d_g^* h \tag{2.7}$$

параболично. *Слабым* или *обобщенным решением* уравнения (2.7) на полуинтервале $[0,T)$, $T \in (0,+\infty]$, принимающим начальное значение

$$q(0) = q_0, \tag{2.8}$$

$q_0 \in L^2(X)$, называется такая функция $q \in W_{loc}(T;X)$, что $f(\,\cdot\,,q) \in L^2_{loc}([0,T)\times X)$ и

$$\langle q(t), p(t)\rangle + \mathcal{L}_t(q,p) = \langle q_0, p(0)\rangle + \int_0^t \Big(\big\langle f\big(\,\cdot\,,q(\tau)\big), p(\tau)\big\rangle + \langle h, dp(\tau)\rangle_{L^2(T^*X)}\Big)d\tau \tag{2.9}$$

для всякого $p \in C^\infty([0,T)\times X)$ и $t \in [0,T)$, где

$$\mathcal{L}_t: W(T;X) \times C^\infty([0,T)\times X) \ni (q,p) \mapsto \int_0^t \Big(\mathcal{L}\big(q(\tau),p(\tau)\big) - \langle q(\tau), p'(\tau)\rangle\Big)d\tau \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

3 Основные результаты

Исследуем условия, при которых слабое решение задачи Коши (2.7), (2.8) существует и единственно.

Функция $u \in W^{1,2}(X)$ называется слабым субрешением (суперрешением) уравнения (2.5), если $f(\,\cdot\,,u) \in L^2(X)$ и для неотрицательных функций $v \in C^\infty(X)$

$$\mathcal{L}(u,v) \le \langle f(\,\cdot\,,u), v\rangle + \langle h, dv\rangle_{L^2(T^*X)} \ \ \big(\mathcal{L}(u,v) \ge \langle f(\,\cdot\,,u), v\rangle + \langle h, dv\rangle_{L^2(T^*X)}\big).$$

Функция $q \in W_{loc}(T;X) \cap C\big(T;L^2(X)\big)$ называется слабым субрешением (суперрешением) задачи Коши (2.7), (2.8) на полуинтервале $[0,T)$, $T \in (0,+\infty]$, если $f(\,\cdot\,,q) \in L^2_{loc}([0,T)\times X)$ и для всех неотрицательных функций $p \in C^\infty([0,T)\times X)$

$$\begin{gathered}\langle q(t), p(t)\rangle + \mathcal{L}_t(q,p) \le \langle q_0, p(0)\rangle + \int_0^t \Big(\big\langle f\big(\,\cdot\,,q(\tau)\big), p(\tau)\big\rangle + \langle h, dp(\tau)\rangle_{L^2(T^*X)}\Big)d\tau \\ \left(\ge \langle q_0, p(0)\rangle + \int_0^t \Big(\big\langle f\big(\,\cdot\,,q(\tau)\big), p(\tau)\big\rangle + \langle h, dp(\tau)\rangle_{L^2(T^*X)}\Big)d\tau\right), \qquad t \in [0,T).\end{gathered} \tag{3.1}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1 (существование и единственность решения). *Пусть метрика* $a \in L^\infty\big((T^*X)^{\otimes^2}\big)$ *удовлетворяет оценке (2.1), векторное поле* $b \in L^\infty(TX)$, *линейные дифференциальные формы* $c, h \in L^\infty(T^*X)$, *существует такое число* $\mu \in \mathbb{R}$, *что*

$$\langle c, dv\rangle_{L^2(T^*X)} + \langle \mu, v\rangle \ge 0 \tag{3.2}$$

для любой неотрицательной функции $v \in C^\infty(X)$, *а функция* $f \in L^\infty_{loc}(X\times\mathbb{R})$ *и п.в. удовлетворяет условию Липшица (2.4). Если* $q_{1,0}$ *и* $q_{2,0}$ *– слабые субрешение и суперрешение задачи (2.7), (2.8) на* $[0,T)$, $T \in (0,+\infty]$, *и* $q_{1,0}, q_{2,0} \in L^\infty([0,T)\times X)$, *то на* $[0,T)$ *существует единственное слабое решение* q *этой задачи, причем* $q_{1,0}(t) \le q(t) \le q_{2,0}(t)$ *п.в. при* $t \in [0,T)$.

Доказательство см. ниже.

Известно, что слабые решения задачи Коши (2.7), (2.8) ограничены и локально непрерывны по Гельдеру. Более точно, справедливое следующее утверждение.

Теорема 2 (регулярность решения). *Пусть выполнены все условия, наложенные в теореме 1 на* *коэффициенты дифференциального оператора L (2.2) и функцию f (2.3). Если q – слабое решение задачи Коши (2.7), (2.8) класса $L^\infty_{loc}([0,T)\times X)$, $T\in(0,+\infty)$, то $q\in C\big(T;L^2(X)\big)$ и для всякой точки $(t,x)\in(0,T)\times X$ найдутся такие ее окрестность U и число $0<\alpha<1$, что $q_{|U}\in C^{0,\alpha}(U)$.*

Доказательство теоремы 2 при ограничениях, наложенных на коэффициенты дифференциального оператора L (2.2) и функцию f (2.3), вытекает из известных свойств слабых решений линейных параболических уравнения, см. [12; гл. VI, § 7], [13; § 1.5]. Естественно, что при дальнейшем повышении регулярности коэффициентов уравнения (2.7) соответствующим образом повышается и регулярность его слабых решений, см. [12; гл. VI, § 2].

Для доказательства теоремы 1 потребуются два технических результата. Во-первых, следующий принцип сравнения.

ЛЕММА 1. *Пусть выполнены все условия, наложенные в теореме 1 на коэффициенты дифференциального оператора L (2.2) и функцию f (2.3). Если для $q_2,q_1\in W(T;X)\cap L^\infty([0,T)\times X)$, $T\in(0,+\infty]$, и любой неотрицательной функции $p\in C^\infty([0,T)\times X)$*

$$\langle q_1(t),p(t)\rangle+\mathcal{L}_t(q_1,p)-\langle q_1(0),p(0)\rangle-\int\limits_0^t\langle f\big(\,\cdot\,,q_1(\tau)\big),p(\tau)\rangle d\tau$$

$$\le\langle q_2(t),p(t)\rangle+\mathcal{L}_t(q_2,p)-\langle q_2(0),p(0)\rangle-\int\limits_0^t\langle f\big(\,\cdot\,,q_2(\tau)\big),p(\tau)\rangle d\tau$$

при $t\in[0,T)$, а $q_1(0)\le q_2(0)$ п.в., то $q_1(t)\le q_2(t)$ п.в. при $t\in[0,T)$. При этом, если $V(\{x\in X\mid q_1(0)\ne q_2(0)\})>0$ $\|q_1(0)-q_2(0)\|_{L^\infty(X)}$, то $q_1(t)<q_2(t)$ п.в. при $t\in(0,T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия Липшица (2.4) при

$$\mu_0=\mu_0\left(\max\left\{\|q_{1,0}\|_{L^\infty([0,T)\times X)},\|q_{2,0}\|_{L^\infty([0,T)\times X)}\right\}\right)$$

выполняется оценка

$$f\big(\,\cdot\,,q_1(\tau)\big)-f\big(\,\cdot\,,q_2(\tau)\big)\le\mu_0\big(q_1(\tau)-q_2(\tau)\big)\operatorname{sgn}\big(q_1(\tau)-q_2(\tau)\big),$$

из которой по условию для $q=q_1-q_2$ и неотрицательных $p\in C^\infty([0,T)\times X)$ имеем

$$\langle q(t),p(t)\rangle+\mathcal{L}_t(q,p)-\langle q(0),p(0)\rangle-\int\limits_0^t\langle\mu_0 q(\tau)\operatorname{sgn}q(\tau)\,,p(\tau)\rangle d\tau\le 0.$$

Согласно определению $\mathcal{L}$ (2.6) $\mathcal{L}(e^{\mu t}q,p)=\mathcal{L}(q,e^{\mu t}p)$, поэтому по определению $\mathcal{L}_t$ (2.10) после замен $q=e^{\mu t}\tilde{q}$ и $\tilde{p}=e^{\mu t}p$ последнее неравенство приобретает вид

$$\langle\tilde{q}(t),\tilde{p}(t)\rangle+\mathcal{L}_t(\tilde{q},\tilde{p})-\langle q(0),\tilde{p}(0)\rangle+\int\limits_0^t\langle(\mu-\mu_0\operatorname{sgn}q(\tau))\tilde{q}(\tau),\tilde{p}(\tau)\rangle d\tau\le 0$$

с неотрицательным $\tilde{p}\in C^\infty([0,T)\times X)$. При выборе достаточно большого $\mu>0$ из полученного неравенства и условия (3.2) вытекают утверждения леммы в силу сильного параболического принципа максимума, см. [12; гл. VI, § 7], [13; § 1.5]. Лемма доказана.

Заметим, что, в частности, лемма 1 верна при $q_1(0)=q_2(0)$ п.в., а также при $f\equiv 0$.

Во-вторых, потребуется следующая априорная оценка.

ЛЕММА 2. *Пусть выполнены все условия, наложенные в теореме 1 на коэффициенты дифференциального оператора L (2.2). Если $q_0\in L^2(X)$, $q,v\in W(T;X)$, $T\in(0,+\infty]$, и для любого $p\in C^\infty([0,T)\times X)$ выполняется равенство*

$$\langle q(t),p(t)\rangle+\mathcal{L}_t(q,p)=\langle q_0,p(0)\rangle+\int\limits_0^t\langle v(\tau),p(\tau)\rangle d\tau\,,\qquad t\in[0,T),$$

то найдется такая постоянная $C>0$, не зависящая от выбора q_0 и v, что

$$\|q\|_{W(t;X)}\le Ce^{Ct}\big(\|v\|_{L^2([0,t)\times X)}+\|q_0\|_{L^2(X)}\big),\qquad t\in[0,T).$$

Доказательство леммы 2 вытекает из известных априорных оценок для слабых решений линейных параболических уравнений второго порядка, см. [12; гл. VI, § 1], [13; § 1.5].

Заметим, что, в частности, лемма 2 верна при $q_0\equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. По условию теоремы и определению (3.1)

$$\langle q_{1,0}(t),p(t)\rangle+\mathcal{L}_t\big(q_{1,0},p\big)-\langle q_0,p(0)\rangle-\int\limits_0^t\langle f\left(\,\cdot\,,q_{1,0}(\tau)\right),p(\tau)\rangle\,d\tau\le$$

$$\langle q_{2,0}(t), p(t)\rangle + \mathcal{L}_t(q_{2,0}, p) - \langle q_0, p(0)\rangle - \int_0^t \langle f\left(\,\cdot\,, q_{2,0}(\tau)\right), p(\tau)\rangle\, d\tau$$

для неотрицательных функции $p \in C^\infty([0,T) \times X)$ и $t \in [0,T)$, и по лемме 1 $q_{1,0}(t) \le q_{2,0}(t)$ п.в. при $t \in [0,T)$. Функция f (2.3) п.в. удовлетворяет условию (2.4), поэтому для

$$\mu \ge \mu_0\left(\max\left\{\left\|q_{1,0}\right\|_{L^\infty([0,T)\times X)}, \left\|q_{2,0}\right\|_{L^\infty([0,T)\times X)}\right\}\right)$$

и функций v_1 и v_2, п.в. удовлетворяющих оценке $q_{1,0} \le v_1 \le v_2 \le q_{2,0}$,

$$f(\,\cdot\,, v_1) + \mu v_1 \le f(\,\cdot\,, v_2) + \mu v_2$$

п.в., ср. [14; прилож. к гл. IV, разд. 2], и, следовательно,

$$\langle f(\,\cdot\,, v_1) + \mu v_1, v\rangle \le \langle f(\,\cdot\,, v_2) + \mu v_2, v\rangle, \tag{3.3}$$

для неотрицательных функций $v \in C^\infty(X)$. Очевидно, что (2.7) эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial q}{\partial t} + Lq + \mu q = f(\,\cdot\,, q) + d_g^* h + \mu q.$$

Построим по индукции последовательные приближения $\{q_{1,l}\}$ и $\{q_{2,l}\}$: при $j = 1{,}2$ в качестве $q_{j,l}$ возьмем слабое решение задачи Коши

$$\frac{\partial q_{j,l}}{\partial t} + Lq_{j,l} + \mu q_{j,l} = f\left(\,\cdot\,, q_{j,l-1}\right) + d_g^* h + \mu q_{j,l-1}, \qquad q_{j,l}(0) = q_0,$$

$l = 1{,}2, \ldots$, т.е. по определению (2.9) для любой функции $p \in C^\infty([0,T) \times X)$ и $t \in [0,T)$

$$\begin{gathered}\langle q_{j,l}(t), p(t)\rangle + \mathcal{L}_t(q_{j,l}, p) + \mu\int_0^t \langle q_{j,l}(\tau), p(\tau)\rangle d\tau = \\ \langle q_0, p(0)\rangle + \int_0^t \left(\langle f\left(\,\cdot\,, q_{j,l-1}(\tau)\right) + \mu q_{j,l-1}(\tau), p(\tau)\rangle + \langle h, dp(\tau)\rangle_{L^2(T^*X)}\right) d\tau.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Линейное уравнение (3.4) имеет единственное слабое решение $q_{j,l} \in W(T;X)$, см. [12; гл. VI, § 1], [13; § 1.5]. Согласно монотонности (3.3) и построению (3.4)

$$\begin{aligned}&\langle q_{j,l}(t), p(t)\rangle + \mathcal{L}_t(q_{j,l}, p) + \mu\int_0^t \langle q_{j,l}(\tau), p(\tau)\rangle d\tau \\ &\qquad \le \langle q_{j,l-1}(t), p(t)\rangle + \mathcal{L}_t(q_{j,l-1}, p) + \mu\int_0^t \langle q_{j,l-1}(\tau), p(\tau)\rangle d\tau,\end{aligned}$$

откуда по лемме 1 при $t \in [0,T)$

$$q_{1,0}(t) \le q_{1,1}(t) \le q_{1,2}(t) \le \cdots \le q_{2,2}(t) \le q_{2,1}(t) \le q_{2,0}(t) \tag{3.5}$$

п.в. В силу монотонности и ограниченности $\{q_{1,l}\}$ и $\{q_{2,l}\}$ п.в. существуют пределы

$$q_1 = \lim_{l\to+\infty} q_{1,l}\,, \qquad q_2 = \lim_{l\to+\infty} q_{2,l}, \tag{3.6}$$

для которых

$$q_{1,0} \le q_{1,1} \le q_{1,2} \le \cdots \le q_1(t) \le q_2(t) \le \cdots \le q_{2,2}(t) \le q_{2,1}(t) \le q_{2,0}(t) \tag{3.7}$$

п.в. Поэтому по теореме Лебега о мажорированной сходимости равенства (3.6) имеют место и в норме $\|\cdot\|_{L^2([0,t)\times X)}$ при $t \in [0,T)$. Далее, по построению (3.4)

$$\begin{aligned}&\langle q_{j,l+m}(t) - q_{j,l}(t), p(t)\rangle + \mathcal{L}_t(q_{j,l+m} - q_{j,l}, p) + \mu\int_0^t \langle q_{j,l+m}(\tau) - q_{j,l}(t), p(\tau)\rangle d\tau \\ &= \int_0^t \langle f\left(\,\cdot\,, q_{j,l-1+m}(\tau)\right) - f\left(\,\cdot\,, q_{j,l-1}(\tau)\right) + \mu\left(q_{j,l-1+m}(\tau) - q_{j,l-1}(\tau)\right), p(\tau)\rangle\, d\tau,\end{aligned}$$

поэтому по лемме 2 найдется такое $C > 0$, что при $j = 1{,}2$ и $l, m = 1{,}2, \ldots$

$$\begin{gathered}\left\|q_{j,l+m} - q_{j,l}\right\|_{W(t;X)} \le Ce^{Ct}\left\|f\left(\,\cdot\,, q_{j,l-1+m}\right) - f\left(\,\cdot\,, q_{j,l-1}\right)\right\|_{L^2([0,t)\times X)} + \\ \mu Ce^{Ct}\left(\left\|q_{j,l-1+m} - q_{j,l-1} - q_{j,l+m} + q_{j,l}\right\|_{L^2([0,t)\times X)}\right).\end{gathered}$$

Отсюда в силу установленной сходимости последовательностей приближений $\{q_{1,l}\}$ и $\{q_{2,l}\}$ в норме $\|\cdot\|_{L^2([0,t)\times X)}$, а также свойств (3.5) и (2.4) заключаем, что эти последовательности фундаментальны и в норме $\|\cdot\|_{W(t;X)}$, см. (2.1), и в силу полноты $W(t;X)$ сходятся к функциям q_1 и q_2 (3.6). Следовательно, переходя в (3.4) к пределу, получаем

$$\langle q_j(t), p(t)\rangle + \mathcal{L}_t(q_j, p) = \langle q_0, p(0)\rangle + \int_0^t \Big(\langle f\Big(\,\cdot\,, q_j(\tau)\Big), p(\tau)\rangle + \langle h, dp(\tau)\rangle_{L^2(T^*X)}\Big)\,d\tau$$

для $j = 0{,}1$, $p \in C^\infty([0,T)\times X)$ и $t \in [0,T)$, т.е. q_j являются слабыми решениями задачи (2.7), (2.8), для которых $q_{1,0}(t) \le q_1(t) \le q_2(t) \le q_{2,0}(t)$ п.в. в силу (3.7).

По лемме 1 для любого слабого решения q задачи (2.7), (2.8) на полуинтервале $[0,T)$ выполняется $q_1 = q = q_2$ п.в. Теорема 1 доказана.

Литература

1. *Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюллетень МГУ. Сер. А. Математика и Механика. Т. 1, № 6, 1937. – С. 1–26.
2. *Fisher R.A.* The advance of advantageous genes. // Ann. Eugenics. Vol. 7, 1937. – P. 335–369.
3. *Berestycki H., François H., Roques L.* Analysis of the periodically fragmented environment model : I – Species persistence // J. Math. Biol, 2005, V. 51. – P. 75–113.
4. *Pethame B.* Parabolic Equations in Biology. Springer, Heidelberg, 2015. – 203 p.
5. *Nicolaescu L.I.* Lectures on the Geometry of Manifolds. – New Jersey: World Scientific, 2021. – 700 p.
6. *Туницкий Д.В.* О построении решений полулинейных эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка на замкнутых многообразиях / Управление развитием крупномасштабных систем. Труды четырнадцатой международной конференции (27-29 сентября 2021 года, Москва, Россия). Москва, ИПУ РАН, 2021. – С. 717–723.
7. *Showalter R.E.* Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations. AMS, Providence, RI, 1997. – 294 p.
8. *Lions J.L.* Equations differentielles operationnelles et problémes aux limites, SpringerVerlag, Berlin, 1961. – 300 p.
9. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. М.: Мир, 1986. – 464 с.
10. *Пале Р.* Семинар по теореме Атьи – Зингера об индексе. М.: Мир, 1970. – 360 с.
11. *Уэллс Р.* Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. М.: Мир, 1976. – 286 с.
12. *Lieberman G.M.* Second Order Parabolic Differential Equations. World Scientific, New Jersey, 2005. – 452 p.
13. *Wang M.* Nonlinear Second Order Parabolic Equations. CRC Press, Boca Ration, 2021. – 298 p.
14. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. – 830 с.