DOI: 10.25728/mlsd.2022.0626

РАНДОМИЗАЦИЯ ПОРТФЕЛЯ ОПЦИОНОВ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ ПО CC-VAR НА СОВОКУПНОСТИ РЫНКОВ

Агасандян Г.А.
ФИЦ ИУ РАН,
г. Москва, ул. Вавилова, 40
agasand17@yandex.ru

Аннотация: Исследуются проблемы использования континуального критерия VaR (CC–VaR) на финансовых рынках, в частности, применение CC–VaR на совокупности одного двумерного и двух одномерных теоретических однопериодных рынков опционов, частично связанных между собой базовыми активами.

Ключевые слова: совокупность рынков опционов, континуальный критерий VaR, прогнозная плотность, стоимостная плотность, бета-распределение, процедура Неймана-Пирсона.

Введение

Доклад продолжает исследования, посвященные проблемам использования континуального критерия VaR (CC–VaR) на финансовых рынках [1–4]. Речь идет о применении CC–VaR на совокупности одного двумерного и двух одномерных теоретических однопериодных рынков опционов, частично связанных между собой базовыми активами. Построение оптимального по CC–VaR комбинированного портфеля ведется на основе расхождений в относительных доходах как в пределах каждого рынка, так и между рынками, при этом должны сохраняться требования критерия.

Формулируются правила замещения базовых инструментов двумерного рынка более выгодными инструментами одномерных рынков. Реализуемость получаемого решения обеспечивается рандомизацией структуры базиса – более предпочтительные базисные инструменты одномерных рынков включаются в работу случайным образом по специально определенному вероятностному правилу. Для целей иллюстрации предлагается строить также его идеалистичную версию – нереализуемый двумерный аналог с эквивалентной платежной функцией.

В прежних работах автора решалась весьма полезная для теоретических исследований задача *CB* с инвестиционной суммой в качестве одного из критериев. Здесь же решается более привычно формулируемая, но и более сложная задача *CG*, в которой сумма инвестиции задана, а рисковые предпочтения инвестора становятся от нее зависящими. Требуется находить регулярный комбинированный портфель с наибольшим средним доходом при выполнении CC–VaR.

1 Постановка задачи

При решении задачи *CG* применяется вариант критерия CC–VaR, требующий при заданной инвестиционной сумме нахождения значения w^* масштабного параметра w и построения из имеющихся на рынке инструментов портфеля, порождающего доход q, для которого

$$\mathsf{P}\left\{q \ge \phi\left(\varepsilon; w\right)\right\} \ge 1-\varepsilon \;\; \text{для } всех \;\; \varepsilon \in [0, 1]. \tag{1}$$

Здесь $\mathsf{P}\{M\}$ – вероятность множества M в соответствии с прогнозом инвестора [1–3], а монотонно возрастающая и непрерывная по ε функция $\phi(\varepsilon, w)$ определяет рисковые предпочтения инвестора и называется *функцией рисковых предпочтений* (ф.р.п.) инвестора.

Цены (случайные) двух базовых активов (в конце периода) обозначаются x и y, параметры инструментов – s и t, при этом $x, s \in \mathsf{X}$, $y, t \in \mathsf{Y}$.

Для *двумерного* рынка #0 в начале периода заданы *прогнозная* (на конец периода) $p(x, y)$ и *стоимостная* $c(x, y)$ плотности, порождающие меры $\mathsf{P}\{\cdot\}$ и $\mathsf{C}\{\cdot\}$ соответственно и относительный доход $\rho(\cdot,\cdot) = p(\cdot,\cdot)/c(\cdot,\cdot)$. Произвольный инструмент $\boldsymbol{G}$ определяется своей платежной функцией $g(x, y) = \pi(x, y; \boldsymbol{G})$, его цена обозначается $|\boldsymbol{G}|$, а средний доход – $\|\boldsymbol{G}\|$. Базис рынка образуют инструменты $\boldsymbol{D}(s, t)$ с $\pi(x, y; \boldsymbol{D}(s, t)) = \delta(x - s, y - t)$. Маргинальные (одномерные) плотности этих двумерных плотностей обозначаются $p_1(x)$, $p_2(y)$ и $c_1(x)$, $c_2(y)$.

Для одномерного рынка #X заданы плотности $p_{\mathrm{X}}(x)$ и $c_{\mathrm{X}}(x)$, порождающие меры $\mathsf{P}_{\mathrm{X}}\{\cdot\}$ и $\mathsf{C}_{\mathrm{X}}\{\cdot\}$ соответственно и относительный доход $\rho_{\mathrm{X}}(\cdot) = p_{\mathrm{X}}(\cdot)/c_{\mathrm{X}}(\cdot)$. Инструменты $\boldsymbol{G}_{\mathrm{X}}$ имеют платежные функции $g_{\mathrm{X}}(x) = \pi(x; \boldsymbol{G}_{\mathrm{X}})$, а базис образуют инструменты $\boldsymbol{D}_{\mathrm{X}}(s)$ с $\pi(x; \boldsymbol{D}_{\mathrm{X}}(s)) = \delta(x - s)$.

Вводятся аналогичные агрегаты для рынка #Y с заменами X→Y, $x \to y$, $\mathsf{X} \to \mathsf{Y}$, $s \to t$.

Для двумерной плотности $c(x, y)$ рынка #0 с безрисковым относительным доходом r

$$\int_{\mathsf{X}\times\mathsf{Y}} c\left(x, y\right) dxdy = 1/r \; .$$

Без ущерба для общности принимается $r = 1$, но для рынков #X и #Y этого сделать уже нельзя, так как они в отношении ценообразования придерживаются независимого подхода, и потому

$$\int_{\mathsf{X}} c_{\mathrm{X}}(x)\,dx = r_{\mathrm{X}}^{-1}, \quad \int_{\mathsf{Y}} c_{\mathrm{Y}}(y)\,dy = r_{\mathrm{Y}}^{-1}.$$

Итак, плотности $c_{\mathrm{X}}(x)$ и $c_{\mathrm{Y}}(y)$, вообще говоря, не совпадают соответственно с $c_1(x)$ и $c_2(y)$. При этом, тем не менее, естественно считать, что для прогнозных плотностей

$$p_1(x) \equiv p_{\mathrm{X}}(x),\ x \in \mathsf{X}, \quad p_2(y) \equiv p_{\mathrm{Y}}(y),\ y \in \mathsf{Y},$$

так как все плотности $p(x, y)$, $p_{\mathrm{X}}(x)$, $p_{\mathrm{Y}}(y)$ составляют взаимосогласованный прогноз инвестора. Для задания всех плотностей в иллюстративных целях в работе используются бета-распределения.

Важные числовые показатели инвестиции образуют запись $\boldsymbol{L} = \langle A.\ R.\ y\rangle$, где

$$A = \int_0^1 \phi(\varepsilon, w)\,d\gamma(\varepsilon), \quad R = \int_0^1 \phi(\varepsilon, w)\,d\varepsilon, \quad y = R/A - 1 > 0;$$

здесь A (> 0) – инвестиционная сумма, R – средний доход, y – средняя доходность.

2 Оптимальные правила замещения

Поскольку решать аналитически теоретическую задачу, как правило, не удается, используется дискретный алгоритм оптимизации на моделях с достаточно подробной структурой сценариев.

Сценарная дискретизация вводится равномерным разбиением множества X на m сценариев $S_i = [x_{i-1}, x_i) \subset \mathsf{X}$, $x_0 = 0$, $x_i = x_0 + i/m$, $i \in I = \{1, \ldots, m\}$, множества Y на n сценариев $T_j = [y_{j-1}, y_j) \subset \mathsf{Y}$, $y_0 = 0$, $y_j = y_0 + j/n$, $j \in J = \{1, \ldots, n\}$. Их прямым произведением получаются $m \times n$ двумерных сценариев, базисными инструментами становятся индикаторы сценариев $\boldsymbol{D}_{ij} = \boldsymbol{H}\{S_i \times T_j\}$, интегралы заменяются суммами, плотности заменяются вероятностями (или стоимостями) для сценариев.

Правила замещения на дискретном (сценарном) рынке определяются разделением множества $I \times J$ всех сценариев на три подмножества M_0, M_1, M_2, состоящие из тех и только тех пар (i, j), $i \in I, j \in J$, для которых относительный доход максимален соответственно на рынках #0, #X, #Y:

$$M_0 = \left\{(i,j) \,\middle|\, \rho_{ij} \ge \rho_{\mathrm{X};i} \ \&\ \rho_{ij} \ge \rho_{\mathrm{Y};j}\right\}, \tag{2}$$

$$M_1 = \left\{(i,j) \,\middle|\, \rho_{\mathrm{X};i} > \rho_{ij} \ \&\ \rho_{\mathrm{X};i} \ge \rho_{\mathrm{Y};j}\right\}, \tag{3}$$

$$M_2 = \left\{(i,j) \,\middle|\, \rho_{\mathrm{Y};j} > \rho_{ij} \ \&\ \rho_{\mathrm{Y};j} > \rho_{\mathrm{X};i}\right\}. \tag{4}$$

Этой классификации однозначно соответствует матрица замещений

$$\mathbf{A} = \left\|a_{ij}\right\|, \quad a_{ij} = k \ \Leftrightarrow\ (i,j) \in M_k, \quad k = 0,1,2. \tag{5}$$

Без труда строится упрощенная *суррогатная* версия комбинированного портфеля. Это делается формальной заменой *по всем сценариям* базисных инструментов рынка #0 *суррогатными* инструментами с теми же платежными функциями и вероятностями, но с ценами, скорректированными согласно правилам замещения и с учетом цен на рынках #X, #Y. Эти инструменты для *суррогатного* портфеля (по понятным причинам нереализуемые) с соответствующими им ценами могут быть записаны при $a_{ij} = 0, 1, 2$ как

$$\boldsymbol{D}_{ij}^{srg}, \quad c_{ij}^{srg} = \left|\boldsymbol{D}_{ij}^{srg}\right| = c_{ij},\ p_{ij}/\rho_{\mathrm{X};i},\ p_{ij}/\rho_{\mathrm{Y};j}.$$

Близкий к планируемому комбинированному портфелю по своим формальным показателям *суррогатный* портфель вполне может использоваться для проверки расчетов.

Классификация 0–0 показывает инструменты рынка #0, подлежащие замещению инструментами рынков #X, #Y:

$$\boldsymbol{M}_{1;i} = \boldsymbol{D}_{1;i} \times \boldsymbol{H}_2\left\{M_{1;i}\right\}, \quad \boldsymbol{M}_{2;j} = \boldsymbol{D}_{2;j} \times \boldsymbol{H}_1\left\{M_{2;j}\right\}, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{D}_{1;i}$, $\boldsymbol{D}_{2;j}$ – сценарные индикаторы, $M_{1;i} \subset J$, $M_{2;j} \subset I$, – множества соответственно по второй и первой координатам рынка #0, $\boldsymbol{H}_1\{\cdot\}$, $\boldsymbol{H}_2\{\cdot\}$ – инструментальные индикаторы множеств.

Естественно, что замещать их приходится базисными инструментами $\boldsymbol{D}_{\mathrm{X}}$, $\boldsymbol{D}_{\mathrm{Y}}$ рынков #X, #Y. Но это следует проделывать с сопоставимыми вероятностями, соблюдением реализуемости процедуры и выполнением требований критерия. Но напрашивающиеся простые варианты оказываются несостоятельными. Очевидно, непосредственное замещение, вообще говоря, увеличивает вероятности. А сохраняющие вероятности замещения в форме инструментов комбинации рынков

$$\boldsymbol{M}_{X;i} = \boldsymbol{D}_{X;i} \times \boldsymbol{H}_2\left\{M_{1;i}\right\}, \quad \boldsymbol{M}_{Y;j} = \boldsymbol{D}_{Y;j} \times \boldsymbol{H}_1\left\{M_{2;j}\right\} \tag{7}$$

не подходят по причине их отсутствия на рассматриваемой совокупности рынков.

Не ведет к цели и уменьшение количеств инструментов $\boldsymbol{D}_{X;i}$ и $\boldsymbol{D}_{Y;j}$ в портфеле. Так можно добиться сохранения средних доходов, но при этом нарушается выполнение критерия CC–VaR. Именно этот критерий четко различает средние значения и целое распределение.

3 Рандомизация базисных инструментов

Выход находится в применении на рынках #X и #Y *рандомизации*, делающей случайными в комбинированном портфеле сами базисные инструменты. На рынках #X, #Y для всех сценариев $i \in I$, $j \in J$ соответственно вводятся взаимонезависимые *биномиальные* случайные величины $\vartheta_{X;i}$, $\vartheta_{Y;j}$ и векторы $\boldsymbol{\theta}_X$, $\boldsymbol{\theta}_Y$ вероятностей *замещения* (*успеха в схеме Бернулли*) $\theta_{X;i}$, $\theta_{Y;j}$:

$$\boldsymbol{\theta}_X = \left\{\theta_{X;i}, i \in I\right\}, \quad \theta_{X;i} = \mathsf{P}\left\{M_{1;i} \middle| i\right\} = \sum\nolimits_{j \in M_{1;i}} p_{ij} \Big/ p_{1;i};$$

$$\boldsymbol{\theta}_Y = \left\{\theta_{Y;j}, j \in J\right\}, \quad \theta_{Y;j} = \mathsf{P}\left\{M_{2;j} \middle| j\right\} = \sum\nolimits_{i \in M_{2;j}} p_{ij} \Big/ p_{2;j}.$$

Параметры $\theta_{X;i}$, $\theta_{Y;j}$ – условные вероятности замещения для рынков #X и #Y при реализации сценариев $i \in I$ и $j \in J$ соответственно. Формально базисные инструменты для рынков #X, #Y и каждых $i \in I, j \in J$ вводятся как

$$\boldsymbol{D}_{X;i}^{cmb} = \vartheta_{X;i} \boldsymbol{D}_{X;i}, \quad \boldsymbol{D}_{Y;j}^{cmb} = \vartheta_{Y;j} \boldsymbol{D}_{Y;j}.$$

Они совпадают со сценарными индикаторами $\boldsymbol{D}_{X;i}$, $\boldsymbol{D}_{Y;j}$ лишь с вероятностями $\theta_{X;i}$, $\theta_{Y;j}$, а становятся *нулевыми* инструментами $\boldsymbol{N}_{X;i}$, $\boldsymbol{N}_{Y;j}$ (ничего не стоящими и приносящими нулевой доход) с вероятностями $1 - \theta_{X;i}$, $1 - \theta_{Y;j}$. Их стоимости и средние доходы (а также связанные с ними вероятности) соответственно равны

$$\left|\boldsymbol{D}_{X;i}^{cmb}\right| = c_{X;i}^{cmb} = \theta_{X;i} c_{X;i}, \quad \left\|\boldsymbol{D}_{X;i}^{cmb}\right\| = p_{X;i}^{cmb} = \theta_{X;i} p_{1;i}; \quad \left|\boldsymbol{D}_{Y;j}^{cmb}\right| = c_{Y;j}^{cmb} = \theta_{Y;j} c_{Y;j}, \quad \left\|\boldsymbol{D}_{Y;j}^{cmb}\right\| = p_{Y;j}^{cmb} = \theta_{Y;j} p_{2;j}. \tag{8}$$

Такой подход уравнивает вероятности, связанные с инструментами 0 и 0. И подтверждением этому служат как раз характеристики в 0 для средних доходов.

Для этого базиса формируется единая функция *относительных доходов*, и к ней применяется общий теоретический алгоритм оптимизации, основанный на процедуре Неймана-Пирсона [5]. В результате его работы производится новое назначение всех вероятностей, и строится новая весовая функция базисных инструментов. А оптимальный *комбинированный* портфель, который теперь *случайный*, приобретает вид

$$\boldsymbol{G}^{cmb} = \sum\nolimits_{(i,j) \in M_0} g_{ij}^{cmb} \boldsymbol{D}_{ij} + \sum\nolimits_{i \in I} g_{X;i}^{cmb} \vartheta_{1;i} \boldsymbol{D}_{X;i} + \sum\nolimits_{j \in J} g_{Y;j}^{cmb} \vartheta_{2;j} \boldsymbol{D}_{Y;j}.$$

Для графической иллюстрации платежной функции используется и упрощенная, хотя и нереализуемая на рынке *идеалистичная* версия портфеля в эквивалентной по платежной функции и ценам форме двумерного портфеля с теми же весами

$$\boldsymbol{G}^{idl} = \sum\nolimits_{(i,j) \in M_0} g_{ij}^{cmb} \boldsymbol{D}_{ij} + \sum\nolimits_{i \in I} g_{X;i}^{cmb} \boldsymbol{M}_{X;i} + \sum\nolimits_{j \in J} g_{Y;j}^{cmb} \boldsymbol{M}_{Y;j}.$$

Отметим, что все проведенные до сих пор построения являются общими для задач *CB* и *CG*, поскольку в них не участвует ф.р.п. инвестора. Для дальнейшей работы сохраняется классификация 0–0 и неизменной остается матрица **A** 0, устанавливающая рандомизированный базис портфеля, а потому не меняется и структура комбинированного портфеля. Далее для решения задачи *CG* используется итеративная процедура, в которой существенная роль отводится ф.р.п. инвестора, а начальным приближением для нее можно рассматривать полученные выше результаты. Итерации проводятся по масштабному параметру w, при этом критерий CC–VaR принимается в форме 0. Зависимость ф.р.п. от параметра масштаба в формальном плане может быть в достаточной степени произвольной, но естественнее полагать, что с ростом масштаба инвестор склонен принимать менее рискованные решения. В качестве примера можно предложить $\phi(\varepsilon; w) = w\varepsilon^{1+1/w}$.

Литература

1. *Агасандян Г.А*. Континуальный критерий VaR и оптимальный портфель инвестора // Управление большими системами, 73 (2018). – С. 6-26.
2. *Агасандян Г.А.* Континуальный критерий VaR на сценарных рынках // Информатика и её применения, 2018. Т. 12. Вып. 1. – С. 32–40.
3. *Агасандян Г.А*. Многомерные рынки опционов и оптимизация по CC-VaR // Управление большими системами, 88 (2020). – С. 5–25.
4. *Агасандян Г.А*. Теоретические основы оптимизации по континуальному критерию VaR на совокупности рынков // Информатика и её применения, 2019. Т. 13. Вып. 5. – С. 38–43.
5. *Крамер Г*. Математические методы статистики / Пер. с англ.– М.: Мир, 1975. 750 с. (Cramer H. Mathematical methods of statistics. – Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 1946. 575 p.)