DOI: 10.25728/mlsd.2022.0648

РАСШИРЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВА ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СЧЁТА В БАНКЕ[1]

Жукова А.А., Флёрова А.Ю.
Федеральное государственное учреждение "Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук", Россия, г. Москва, ул. Вавилова, д.44, корп. 2
sasha.mymail@gmail.com, a.flerova@mail.ru

Аннотация: Данная работа представляет собой модификацию модели оптимальных инвестиций в расширение производства. Мы вводим возможность иметь счет в банке и переформулируем модель, меняя цель производителя, что позволяет реалистично описывать производство на несовершенном рынке капитала с различными ставками по депозитам и кредитам.

Ключевые слова: производитель, счёт в банке, оптимальное управление

Введение

Эта работа представляет собой расширение модели оптимальных инвестиций в расширение производства [1]. Мы вводим возможность иметь счет в банке и переформулируем модель, меняя цель производителя. Оказывается, что решение модифицированной модели качественно напоминает решение модели без банка, но производитель делает инвестиции в течение более короткого периода времени. Чем выше проценты на банковском счете, тем меньше стимулов тратить деньги на расширение производства. Эта модель используется в качестве базовой модели для более реалистичного описания производства на несовершенном рынке капитала [2] с различными ставками по депозитам и кредитам.

Моделирование проблемы производителя с изменяющимся доходом является полезным инструментом для рассмотрения реакции производственной компании на внешние условия [3].

1 Задача максимизации прибыли производителя

Начнём с рассмотрения математической задачи, приведенной в [1]. Предположим, что предприятие производит и мгновенно реализует один вид товара. Обозначим через $x(t)$ выручку предприятия в момент времени t. Пусть $u(t)$ – это доля выручки $x(t)$, которую производитель может пустить на расширение производства: выручка будет расти пропорционально вложениям с некоторым коэффициентом $\alpha > 0$, который характеризует уровень отдачи от инвестиций.

$$\frac{dx}{dt} = \alpha u(t) x(t). \tag{1}$$

Пусть известен начальный капитал $x(0) = x_0 > 0$. В данной модели будем считать, что издержки пропорциональны выпуску с некоторым коэффициентом $\beta \in (0,1)$. Таким образом, прибыль производителя за время T определяется как $Q = \int_0^T \big(x(t) - u(t)x(t) - \beta x(t)\big)dt$. Обозначим $\mu = 1 - \beta$.

Задача максимизации прибыли производителя за период времени T представляет собой следующую задачу оптимального управления:

$$\int_0^T \big(\mu - u(t)\big) x(t)\, dt \to max$$

$$\dot{x}(t) = \alpha u(t) x(t), \tag{2}$$

[1] *Работа выполнена при поддержке проекта РНФ № 22-21-00746 «Модели, методы и комплексы программ для поддержки моделирования социально-экономических процессов с возможностью прогнозирования и сценарных расчетов»*

$$0 \le u(t) \le \mu, \quad x(0) = x_0.$$

Для начала будем считать коэффициент α положительной константой. В нашей модели доля $u(t)$ является управляющим параметром.

Для решения этой задачи оптимального управления запишем уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана, которое в случае данной системы будет давать не только необходимое, но и достаточное условие оптимальности [4]

$$-\frac{\partial S(t,x)}{\partial t} = \max_{0 \le u(t) \le \mu}\left[\mu x(t) - u(t)x(t) + \alpha u(t)x(t)\frac{\partial S(t,x)}{\partial x}\right], \tag{3}$$

с граничными условиями $S(T,x) = 0$, то есть

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \mu x + \max_{0 \le u \le \mu}\left[\left(\alpha\frac{\partial S}{\partial x} - 1\right)xu\right]. \tag{4}$$

Оптимальное значение функции управления $u(t)$ максимизирует значение в квадратных скобках уравнения (4), таким образом,

$$u(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } \alpha\dfrac{\partial S}{\partial x} < 1; \\ \mu, \text{ если } \alpha\dfrac{\partial S}{\partial x} > 1. \end{cases} \tag{5}$$

Рассмотрим подробнее эти два значения.

В случае, если $u(t) = \mu$, уравнение (4) становится линейным однородным уравнением в частных производных

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \alpha\frac{\partial S}{\partial x}\mu x. \tag{6}$$

Решение этого уравнения может быть представлено в виде $S(t,x) = F(xe^{-\mu\alpha t})$, где F некоторая непрерывная функция. Обратимся к граничным условиям $S(T,x) = 0$. Если на конце рассматриваемого интервала оптимальным управлением является $u(t) = \mu$ (на некотором отрезке $[t_1, T]$, где $0 < t_1 < T$), то граничные условия $S(T,x) = F(xe^{-\mu\alpha T}) = 0$ должны выполняться для любого x. Но это возможно только в случае $F \equiv 0$, что является тривиальным решением, когда функционал остается нулевым.

В другом случае, когда $u(t) = 0$ выражение (4) становится следующим:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \mu x. \tag{7}$$

В этом случае функция $S(t,x)$ убывает и может достичь граничных условий $S(T,x) = 0$. Поэтому на некотором интервале $[\tau, T]$, где $0 < \tau < T$, функция $S(t,x)$ имеет вид $S(t,x) = \mu x(T-t)$. Момент переключения τ может быть найден из факта (5), который утверждает, что управление переключается, когда $\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1}{\alpha}$, получаем $\alpha\frac{\partial S(t,x)}{\partial x}\Big|_{t=\tau} = \alpha\mu(T-\tau) = 1$, откуда

$$\tau = T - \frac{1}{\alpha\mu}. \tag{8}$$

Заметим, что $\frac{\partial^2 S(t,x)}{\partial x \partial t}\Big|_{\tau} < 0$ и случай $u(t) = \mu$ слева от τ меняется на случай $u(t) = 0$ справа от τ.

Функция $S(t,x)$ должна быть непрерывной в точке τ, поэтому выполняются следующие равенства: $F(xe^{-\mu\alpha\tau}) = \mu x(T-\tau) \;\Rightarrow\; F(xe^{-\mu\alpha T+1}) = \frac{x}{\alpha}.$ Сделаем замену $xe^{-\mu\alpha T+1} = y$, тогда

$x = ye^{\mu\alpha T-1}$ и $F(y) = \dfrac{ye^{\mu\alpha T-1}}{\alpha}$. Тогда

$$S(t,x)\big|_{t<\tau} = \frac{xe^{-\alpha\mu t}}{\alpha} e^{\alpha\mu T-1} = \frac{x}{\alpha} e^{\mu\alpha(\tau - t)}, \qquad (9)$$

то есть слева от точки τ функция $S(t,x)$ также убывает. Поэтому оптимальное управление имеет не более одной точки переключения.

Нетрудно проверить, что полученная функция $S(t,x)$ является непрерывной и гладкой.

Итак, оптимальным управлением в задаче (2) является функция

$$u(t) = \begin{cases} \mu,\ при\, t \in \left[0, T - 1/\alpha\mu\right] \\ 0,\ при\, t \in \left[T - 1/\alpha\mu, T\right]; \end{cases} \qquad (10)$$

Данное решение означает, что «экономическая жизнь» предприятия, т.е. период его функционирования $[0,T]$, имеет две разных стадии: в начале производитель тратит весь доход на расширение производства, вкладывает всё в инвестиции, и этот период мы назовём период инвестиций, а на второй стадии потребляет весь доход, это период потребления.

Заметим, что в зависимости от отношения параметров модели (например, если время T не достаточно) может не существовать периода инвестиций, и производитель только потребляет доход всё время жизни предприятия. Это случай, когда момент переключения оказывается левее 0: $\tau = T - \dfrac{1}{\alpha\mu} < 0$. Отношения эти двух периодов зависят от сочетания параметров модели T, α и μ.

2 Модель со стохастической составляющей

Логично предположить, что отдачи от вложения в производство не постоянны, зависят от внешних факторов, изменчивой ситуации на рынке и прочих обстоятельств. Поэтому рассмотрим поведение производителя в случае, когда коэффициент отдачи от вложений в расширение производства α является бернуллиевской случайной величиной $\alpha_t = \alpha_i$ с вероятностью p_i, $i = 1,...,n$. Для того, чтобы исследовать стохастическую составляющую, сформулируем нашу модель (2) в дискретном времени:

$$\sum_{t=0}^{T-1} (\mu - u_t) x_t \to \max$$
$$x_{t+1} = x_t + \alpha_t u_t x_t, \qquad (11)$$
$$x(0) = x_0 > 0,\quad 0 \le u_t \le \mu.$$

В данной модели очень важным оказывается предположение о последовательности событий между моментами времени t и $t+1$. Эту последовательность можно связать с информационным ограничением агента. Он либо знает рыночную конъюнктуру на момент принятия решения об инвестициях, либо не знает. В задачах с непрерывным временем такое описание доступной информации привело бы к предположению о непрерывности слева или непрерывности справа траекторий системы [11]. Различные предположения приводят к существенно различным результатам.

Предположим, что в момент времени t производитель сначала принимает решение о выборе управления u_t, а потом узнает значение α_t. Тогда оптимальное управление в задаче (11) имеет следующей вид [5]:

$$u_t^{opt} = \begin{cases} \mu,\ if\,(T-t-1)E(\alpha)\mu - 1 > 0, \\ 0,\ if\,(T-t-1)E(\alpha)\mu - 1 < 0. \end{cases} \qquad (12)$$

Нетрудно убедиться, что это управление качественно очень похоже на полученное для задачи (11) оптимальное управление (10), аналогично имеет два периода «всё вкладывать» и «всё потреблять», и при $\alpha = const$ мы легко получаем из (12) оптимальное управление для задачи (2) в дискретном времени.

Ещё одним интересным случаем является стохастика в модели с непрерывном времени.

$$\frac{dx}{x} = \alpha u(t)\,dt + \sigma dW, \quad 0 \le u(t) \le \mu, x(0) = x_0.$$

Здесь W – винеровский процесс, σ – уровень шума. В данной модели на сложившуюся конъюнктуру могут случайным образом влиять внешние факторы. Эта модель представляет собой тему дальнейших исследований.

3 Модель влияния банковского процента на расширение производства

Предположим, производитель может взаимодействовать с банком через открытие счета. Сумму денег остатка на счете обозначим $a(t)$. Банковская ставка r по депозитам и кредитам предполагается одинаковой и постоянной для базовой модели представленной здесь, но мы исследуем модель с меняющимися ставками в настоящее время и представим формулировку модели в конце данной статьи.

Сумма денег на банковском счете увеличивается за счет выручки производителя $x(t)$, уменьшается на издержки производства $\beta x(t)$ и инвестиционные затраты $u(t)x(t)$. Часть b_1 полученной прибыли уплачивается в виде налога. Последним составляющим, влияющим на банковский счет, являются процентные платежи на остаток по счету $ra(t)$.

Таким образом, динамика банковского счета

$$\frac{d}{dt}a(t) = x(t) - \beta x(t) - u(t)x(t) - b_1\big(x(t) - \beta x(t) - u(t)x(t)\big) + ra(t), \quad a(0) = a_0. \tag{13}$$

Изменение доходов производителя определяется нормой инвестиций $u(t)$, как в базовой модели

$$\frac{d}{dt}x(t) = \alpha u(t)x(t), \quad x(0) = x_0. \tag{14}$$

Путем замены параметров и масштабирования переменной банковского счета

$$1 - \beta = \mu, \quad 1 - b_1 = b, \quad a(t) = b\,A(t), \tag{15}$$

упрощаем уравнение (13) до

$$\frac{d}{dt}A(t) = x(t)\mu - u(t)x(t) + rA(t), \quad A(0) = A_0. \tag{16}$$

Таким образом, задача оптимального управления состоит в том, чтобы максимизировать конечную сумму денег на банковском счете:

$$\max A(T) \tag{17}$$

Путем оптимального выбора нормы инвестиций $u(t)$ из пространства

$$\mathbf{A} = \{u(\cdot) \in PC[0,T], 0 \le u(t) \le K, K \ge \mu\}. \tag{18}$$

Условие $K \ge \mu$ подразумевает, что производитель может инвестировать больше, чем текущая прибыль, следовательно, в долг.

Найдем решение методом множителей Лагранжа для функционала Лагранжа

$$\begin{gathered}\mathcal{L} = \lambda_0 A(T) + \int_0^T \left[p_1(t)\left(x(t)\mu - u(t)x(t) + rA(t) - \frac{d}{dt}A(t) \right) + p_2(t)\left(\alpha u(t)x(t) - \frac{d}{dt}x(t) \right) \right] dt + \\ + \nu_1\big(A_0 - A(0)\big) + \nu_2\big(x_0 - x(0)\big).\end{gathered} \tag{19}$$

Принцип максимума Понтрягина дает достаточные условия оптимальности из-за выпуклости функционала стоимости и ограничений [6].

$$p_1(t)\mu - p_1(t)u(t) + p_2(t)\alpha u(t) + \frac{d}{dt}p_2(t) = 0, \tag{20}$$

$$p_1(t)r + \frac{d}{dt}p_1(t) = 0, \tag{21}$$

$$\max\big(-p_1(t)u(t)x(t) + p_2(t)\alpha u(t)x(t)\big), \tag{22}$$

$$\lambda_0 - p_1(T) = 0,\ p_1(0) - \nu_1 = 0, \tag{23}$$

$$p_2(T) = 0, p_2(0) - \nu_2 = 0. \tag{24}$$

Мы рассматриваем случай $\lambda_0 = 1$, иначе все двойственные переменные тривиальны. Из (21)

$$p_1(t) = \mathrm{e}^{rT-rt}. \tag{25}$$

Можно показать, что управление $u(t)$, которое обеспечивает максимум в (22), зависит от знака выражения $\mu\alpha - r$.

Случай относительно высокой процентной ставки. Для высокой процентной ставки r или низкой отдачи от инвестиций α или высоких издержек $\mu = 1 - \beta$ выражение $\mu\alpha - r$ отрицательно и (22) достигается при $u(t) = 0$ для всех t, так как в этом случае коэффициент при $u(t)$ в (22)

$$-p_1(t) + p_2(t)\alpha = -\frac{\mu\alpha}{r} + \frac{(\mu\alpha - r)\mathrm{e}^{r(T-t)}}{r} < 0. \tag{26}$$

Случай относительно низкой процентной ставки при $\mu\alpha - r > 0$. Поскольку из (23)–(24) и (22), найдется момент времени τ, такой что для $\tau < t \le T$ выполняется неравенство $-p_1(t) + p_2(t)\alpha < 0$. Тогда максимум в (22) будет достигнут при $u(t) = 0$.

В точке $t = \tau$ коэффициент $u(t)$ равен нулю

$$-p_1(\tau) + p_2(\tau)\alpha = 0. \tag{27}$$

Отсюда можно выразить момент времени τ

$$-\frac{\mu\alpha}{r} + \frac{(\mu\alpha - r)\mathrm{e}^{r(T-\tau)}}{r} = 0,$$

$$\tau = T - \ln\left(\frac{\mu\alpha}{\mu\alpha - r}\right) r^{-1}. \tag{28}$$

Этот момент времени меньше момента времени, когда производитель меняет управление с инвестиций на нулевые инвестиции в модели без банка, так как при малых r

$$\tau = T - \frac{1}{\mu\alpha} - \frac{r}{2\mu^2\alpha^2} + O(r^2). \tag{29}$$

Так как $\mu\alpha - r > 0$, то $K\alpha - r > 0$ при $K \ge \mu$.

Предположение $-p_1(t) + p_2(t)\alpha > 0$ для $t < \tau$ приводит к максимуму в (22) при $u(t) = K$. Поэтому из условий оптимальности

$$p_2(t) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\alpha Kt + r(T-t)}(K - \mu)}{\alpha K - r} + C\right)\mathrm{e}^{-\alpha Kt}. \tag{30}$$

Постоянная C может быть найдена из (27):

$$C = \mu^{1-\frac{\alpha K}{r}} \alpha^{-\frac{\alpha K}{r}} \frac{(\mu\alpha - r)^{\frac{\alpha K}{r}} \mathrm{e}^{\alpha KT}}{(\alpha K - r)}. \tag{31}$$

Следует отметить, что в практике экономического моделирования такие сложные выражения обычная задача. Мы используем подход и библиотеку системы ЭКОМОД, разработанную в Вычислительном центре РАН (сейчас в составе ФИЦ ИУ РАН) [8], [9].

Из (25) и (30) можно показать, что выражение $-p_1(t) + p_2(t)\alpha$ действительно положительно, так как $\frac{d}{d\tau}\left(-p_1(\tau) + p_2(\tau)\alpha\right) = -\mu\alpha$ и выражение $-p_1(t) + p_2(t)\alpha$ является комбинацией двух экспонент $\mathrm{e}^{\alpha KT - \alpha Kt}$ и e^{rT-rt} с постоянными коэффициентами.

Таким образом, мы нашли управление $u(t)$ и двойственные переменные $p_1(t)$ и $p_2(t)$ которые удовлетворяют условиям оптимальности и, следовательно, обеспечивают решение задачи производителя.

$$u(t)=\begin{cases} K, & t<T-\ln\left(\dfrac{\mu\alpha}{\mu\alpha-r}\right)r^{-1}, \\ 0, & t>T-\ln\left(\dfrac{\mu\alpha}{\mu\alpha-r}\right)r^{-1}. \end{cases} \tag{32}$$

Соответствующая траектория может быть найдена, но выражение длинное, и мы не помещаем его в этот текст. Однако, что может быть важно, так это увидеть окончательную сумму денег на счету производителя.

$$A(T)=\frac{\left(Kx_0-x_0\mu+A_0\alpha K-rA_0\right)\mathrm{e}^{rT}}{\alpha K-r}+\mu^{-\frac{\alpha K-r}{r}}\alpha^{-\frac{\alpha K}{r}}\left(\mu\alpha-r\right)^{\frac{\alpha K}{r}}x_0\mathrm{e}^{\alpha KT}\left(\alpha K-r\right)^{-1}. \tag{33}$$

4 Модификация модели для условий несовершенного рынка

Эта модель была бы более реалистичной, если бы процентная ставка по кредитам r_l была выше процентной ставки по депозитам r_d , а динамика счета производителя включала бы соответствующую ставку в зависимости от знака остатков по счетам в банке:

$$\frac{d}{dt}A(t)=x(t)\mu-u(t)x(t)+r_d\left[A(t)\right]_+ +r_l\left[A(t)\right]_-,\quad A(0)=A_0, \tag{34}$$

$$\text{где } [A]_+=\begin{cases} A, A\ge 0, \\ 0, A<0, \end{cases} \qquad [A]_-=\begin{cases} A, A\le 0, \\ 0, A>0. \end{cases}$$

Эта модель, однако, требует подхода, отличного от метода Лагранжа, из-за негладкости правой стороны в (34) как в модели поведения домашних хозяйств в [4].

Заключение

Производитель принимает решение о расширении производства в зависимости от сложившейся для него ситуации, которая описывается параметрами модели: процентной ставкой, себестоимостью товара, коэффициентом отдачи от инвестиций и оставшимся временем жизни компании. Оптимальным для производителя (это зависит от параметров и от начальной суммы на счёте) может быть решение вообще не расширять производство, либо сначала всё вкладывать, потом всё сохранять. Наличие банковского счёта может позволить сократить период активных инвестиций.

Благодарность

Авторы благодарны Л. А. Бекларяну за обсуждение, которое существенно способствовало работе.

Литература

1. *Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения. М.: Факториал Пресс, 2006. – 144 с.
2. *Шананин А.А.* Математическое моделирование инвестиций на несовершенном рынке капитала // Труды института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 4. – С. 265–274.
3. *Обросова Н.К., Шананин А. А.* Исследование уравнения Беллмана в модели производства с нестабильным спросом // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2014. Т. 54. № 9. – С. 1465–1496.
4. *Бекларян Л.А., Флёрова А.Ю., Жукова А. А.* Методы оптимального управления: учеб. пособие. – М.: МФТИ, 2018. – 191 с.
5. *Delev A., Flerova A., Zhukova A.* Application of Machine Learning in the producer's optimal control problem with non-stable demand // Proceedings of 2022 8th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT). 2022. – C. 867–871. Doi: 10.1109/CoDIT55151.2022.9803997.
6. *Seierstad A., Sydsaeter K.* Sufficient conditions in optimal control theory // International Economic Review. 1977. – C. 367–391.
7. *Khokhlov M.A., Pospelov I.G., Pospelova L.Y.* Technology of development and implementation of realistic (country–specific) models of intertemporal equilibrium // International Journal of Computational Economics and Econometrics. 2014. Т. 4. № 1–2. – С. 234–253.

8. *Pospelov I. G., Khokhlov M. A.* Dimensionality control method for economy dynamics models // Matematicheskoe modelirovanie. 2006. T. 18. № 10. – С. 113–122.
9. *Zavriev N. K., Pospelov I. G., Pospelova L. Y.* Investigation of economy mathematical models with system ECOMOD tools //Matematicheskoe modelirovanie. 2003. T. 15. № 8. – С. 57–74.
10. *Тарасенко М.В., Трусов Н.В., Шананин А.А.* Математическое моделирование экономического положения домашних хозяйств в России // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021. Т. 61. № 6. – С. 1034–1056.
11. *Поспелов И. Г., Жукова А. А.* Стохастическая модель торговли неликвидным товаром // Труды Московского физико-технического института. 2012. Т. 4. № 2–14.