DOI: 10.25728/mlsd.2022.0665

УСТОЙЧИВОСТЬ И НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ ОТКРЫТОГО РЫНКА [1]

Котюков А.М., Павлова Н.Г.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
Россия, г. Москва ул. Профсоюзная д. 65
amkotyukov@mail.ru, natasharussia@mail.ru

Аннотация: Исследована модель открытого рынка, в которой функции спроса и предложения восстановлены по известным эластичностям. Получены достаточные условия устойчивости и неединственности положения равновесия в модели. Эти условия получены как следствия теорем о мощности множества точек совпадения накрывающего и липшицевого отображений.

Ключевые слова: накрывающее отображение, модель открытого рынка, спрос, предложение, положение равновесия, точка совпадения.

Введение

Положение равновесия является основным объектом исследования современной экономики. Поясним содержание этого понятия. Пусть на рынке присутствуют две группы участников: производители и потребители. Производители выпускают товары, которые впоследствии продаются потребителям. Объем какого-либо произведенного товара назовем предложением этого товара, а объем этого товара, приобретаемый покупателями – спросом. Очевидно, что спрос на рынке на всякий товар не должен превышать предложение этого товара – действительно, в таком случае в моделируемом регионе возникнут неблагоприятные условия (голод, болезни, нищета и др.). С другой стороны, предложение любого товара на рынке также не должно превышать спрос на этот товар, так как, с одной стороны, это ведет к уменьшению бюджета потребителей, что негативно сказывается на их покупательской способности, а с другой – к перепроизводству и увеличению убытков производителей. Из этих соображений можно сделать вывод, что лучшей ситуацией на рынке будет та, при которой спрос на всякий товар равен совокупному предложению этого товара или, проще, спрос равен предложению. Такая ситуация называется экономическим равновесием, а цены, при которых данная ситуация сформировалась – равновесными.

Одно из первых упоминаний экономического равновесия принадлежит Адаму Смиту в работе «Исследование о природе и причинах богатства народов» в 1776 году [1], в которой был сформулирован так называемый «принцип невидимой руки», согласно которому рыночное равновесие достигается, благодаря действиям участников рынка, преследующих сугубо личный интерес. Спустя почти 100 лет Вальрас смог придать этой идее первую математическую трактовку [2]. В конце XIX века математический аппарат был недостаточно развит для исследования вопроса об условиях существования положения равновесия даже в линейных моделях. Первые законченные результаты о существовании положения равновесия были получены Эрроу и Дебре [3] только в 1956 году.

Благодаря результатам в теории накрывающих отображений и точек совпадения [4–6] удается получить достаточные условия существования положения равновесия и в случае нелинейных моделей, что позволяет получить содержательные результаты в области современной прикладной экономики. Более того, эти результаты также позволяют построить алгоритм поиска положения равновесия в случае его существования [7].

В настоящей работе исследуется вопрос об устойчивости положения равновесия в статической модели открытого рынка с известными эластичностями, а также вопрос о неединственности этого

[1] *Исследование выполнено при поддержке РФФИ (грант № 20-01-00610).*

Теорема 3 получена Котюковым А.М. за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00042, https://rscf.ru/project/22-11-00042/ в ИПУ РАН.

Теорема 4 получена Павловой Н.Г. финансовой поддержке Министерства Науки и Образования Российской Федерации, госзадание № 075-00337-20-03, проект № 0714-2020-0005.

положения в модели. Соответствующие теоремы получены как следствия теорем о точках совпадения накрывающего и липшицевого отображений.

1 Модель открытого рынка

1.1 Постановка задачи

Обозначим $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_i > 0\ \forall i = \overline{1,n}\}$. Пусть известны:

- $n \in \mathbb{N}$ – число товаров на рынке;
- векторы $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n_+$, $c_1 = (c_{11}, \dots, c_{1n})$, $c_2 = (c_{21}, \dots, c_{2n})$ такие, что $0 < c_{1i} < c_{2i}\ \forall i = \overline{1,n}$ – естественные ограничения на цены на товары (обозначим $P = [c_{11}; c_{21}] \times \dots \times [c_{1n}; c_{2n}]$);
- значения спроса и предложения при наборе цен $p^* = (p^*_1, \dots, p^*_n) \in P$:
$$D^*, S^* \in \mathbb{R}^n_+, \qquad D^* = D(p^*) = (D^*_1, \dots, D^*_n), \qquad S^* = S(p^*) = (S^*_1, \dots, S^*_n);$$
- квадратные матрицы $\mathcal{E} = \left(E_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$, $\tilde{\mathcal{E}} = \left(\tilde{E}_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ порядка n, элементы которых E_{ij} и $\tilde{E}_{ij}$ – эластичности спроса и предложения на i-й товар по цене на j-й товар соответственно. Эти величины показывают, насколько изменятся спрос и предложение (соответственно) на товар с номером i при изменении цены на товар с номером j;
- вектор $\bar{a} \in \mathbb{R}^n_+$, $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$, где a_i – количество импортируемого на рынок i-го товара. Предполагается, что хотя бы одно $a_i > 0$.

Определение. Моделью открытого рынка назовем набор параметров:
$$\sigma = \left(a, c_1, c_2, p^*, S^*, D^*, \mathcal{E}, \tilde{\mathcal{E}}\right).$$

Множество всех моделей открытого рынка обозначим через Σ.

Набор σ однозначно определяет функции спроса
$$D: P \to \mathbb{R}^n_+, \qquad D = (D_1, \dots, D_n),$$
и предложения
$$S: P \to \mathbb{R}^n_+, \qquad S = (S_1, \dots, S_n),$$
по формулам:
$$D_i(p_1, \dots, p_n) = D^*_i \prod_{j=1}^n \left(p^*_j\right)^{-E_{ij}} p_j^{E_{ij}}, \quad i = \overline{1,n}; \tag{1}$$
$$S_i(p_1, \dots, p_n) = S^*_{i.} \prod_{j=1}^n \left(p^*_j\right)^{-\tilde{E}_{ij}} p_j^{\tilde{E}_{ij}}, \quad i = \overline{1,n}; \tag{2}$$
которые являются явными решениями систем дифференциальных уравнений в частных производных:
$$E_{ij} = \frac{\partial D_i}{\partial p_j} \frac{p_j}{D_i}, \qquad \tilde{E}_{ij} = \frac{\partial \mathrm{S}_i}{\partial p_j} \frac{p_j}{\mathrm{S}_i}, \qquad i, j = \overline{1,n}.$$

Эти формулы являются определениями эластичностей спроса и предложения по цене соответственно.

1.2 Положение равновесия

Определение. Положением равновесия, или вектором равновесных цен в модели σ назовем такой вектор $p^0 \in P$ такой, что
$$S(p^0) + a = D(p^0).$$

В [8] были получены следующие достаточные условия существования положения равновесия в этой модели. А именно, пусть
$$\bar{\alpha}(\sigma) = \left[\max_{i=\overline{1,n}} \left(S^*_i \prod_{j=1}^n \left(p^*_j\right)^{-\tilde{E}_{ij}} \min\left\{c_{1j}^{\tilde{E}_{ij}}, c_{2j}^{-\tilde{E}_{ij}}\right\} \right)^{-1} \sum_{k=1}^n \frac{c_{2k} - c_{1k}}{2} c_{2k} \left|\tilde{E}^{-1}_{ki}\right| \right]^{-1},$$
$$\bar{\beta}(\sigma) = \max_{i=\overline{1,n}} \left(D^*_i \prod_{j=1}^n \left(p^*_j\right)^{-E_{ij}} \max\left\{c_{2j}^{E_{ij}}, c_{1j}^{-E_{ij}}\right\} \right) \sum_{k=1}^n \frac{c_{2k} - c_{1k}}{2c_{1k}} |E_{ik}|,$$
$$\bar{\gamma}(\sigma) = \max_{i=\overline{1,n}} |S_i(\tilde{c}) + a_i - D_i(\tilde{c})|,$$
где $\tilde{E}^{-1}_{ki}$ – элемент матрицы, обратной к $\tilde{\mathcal{E}}$, $\tilde{c} = (c_1 + c_2)/2$.

Теорема 1 ([8])**.** Пусть параметры модели открытого рынка $\sigma \in \Sigma$ удовлетворяют условию $\bar{\gamma}(\sigma) < \bar{\alpha}(\sigma) - \bar{\beta}(\sigma)$, а матрица $\tilde{\mathcal{E}}$ является обратимой. Тогда в модели σ существует вектор равновесных цен $p^0 \in P$.

2 Устойчивость и неединственность положения равновесия

Теперь перейдем к формулировке основных результатов. Для этого нам потребуется определение накрывающего отображения и несколько вспомогательных утверждений. Пусть (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) – метрические пространства с метриками ρ_X, ρ_Y соответственно. Через $B_X(x, r)$ обозначим замкнутый шар с центром в точке $x \in X$ радиуса $r > 0$, аналогично определим $B_Y(y, r)$.

Определение. Отображение $S: X \to Y$ называется α-накрывающим, если

$$S\big(B_X(x,r)\big) \supseteq B_Y(S(x), \alpha r)\ \forall x \in X, \forall r > 0.$$

Пусть теперь $S^N, D^N: P \to \mathbb{R}_+^n\ \forall N \in \mathbb{N}$.

Теорема 2 ([10])**.** Предположим, что метрическое пространство X полно, заданы точка $x^0 \in X$ и числа $\alpha > 0, \beta > 0, R > 0$, причем $\alpha > \beta$, а точка x^0 является точкой совпадения отображений S и D, т.е. $S(x^0) = D(x^0)$. Пусть также имеет место:

для любого натурального N отображение S^N является α-накрывающим на $B_X(x^0, R)$ и замкнутым;

для любого натурального N отображение D^N удовлетворяет условию Липшица с константой β на множестве $B_X(x^0, R)$;

$$\rho_Y\big(S^N(x^0), S(x^0)\big) \to 0, \rho_Y\big(D^N(x^0), D(x^0)\big) \to 0, \qquad N \to \infty.$$

Тогда существует номер $\bar{N} > 0$ и последовательность $\{x_N\} \subset X$ такие, что

$$S^N(x_N) = D^N(x_N)\ \forall n > \bar{N},$$
$$x_N \to x^0, N \to \infty.$$

Перейдем теперь к первому основному результату данной работы.

Определение. Будем говорить, что модель $\sigma^N = \big(a^N, c_1^N, c_2^N, p^{*N}, S^{*N}, D^{*N}, \mathcal{E}^N, \tilde{\mathcal{E}}^N\big) \in \Sigma$ сходится к модели $\sigma = \big(a, c_1, c_2, p^*, S^*, D^*, \mathcal{E}, \tilde{\mathcal{E}}\big) \in \Sigma$, если

$$a^N \to a, c_1^N \to c_1, c_2^N \to c_2, p^{*N} \to p^*, S^{*N} \to S^*, D^{*N} \to D^*, \mathcal{E}^N \to \mathcal{E}, \tilde{\mathcal{E}}^N \to \tilde{\mathcal{E}}$$

при $N \to \infty$.

Теорема 3 (об устойчивости положения равновесия в модели открытого рынка)**.** Пусть модель σ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 и последовательность моделей $\{\sigma^N\} \subset \Sigma$ сходится к σ. Тогда для любого вектора равновесных цен $p \in P$ модели σ существует натуральное число $\bar{N} > 0$ и последовательность $\{p^N\} \subset \mathbb{R}_+^n$ такие, что:

1. при любом $N > \bar{N}$ вектор p^N является вектором равновесных цен модели σ^N;
2. $p^N \to p$ при $N \to \infty$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы опирается на применение теоремы 2. Сначала проведем вспомогательные построения. Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим

$$v_1^\varepsilon = \tilde{c} - (1-\varepsilon)(\tilde{c} - c_1), v_2^\varepsilon = \tilde{c} + (1-\varepsilon)(c_2 - \tilde{c}),$$
$$M^\varepsilon = [v_{11}^\varepsilon, v_{21}^\varepsilon] \times \ldots \times [v_{n1}^\varepsilon, v_{n2}^\varepsilon].$$

Очевидно, что для любого положительного $\varepsilon < 1$ справедливы $v_{j1}^\varepsilon < v_{j2}^\varepsilon, j = \overline{1,n}$ и включение $M^\varepsilon \subset P$.

Пусть $p \in P$ – вектор равновесных цен в модели σ. Тогда $p \in \operatorname{int} M$, где $M \subset \mathbb{R}^n$ – шар ненулевого радиуса, и, следовательно, существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $p \in \operatorname{int} M^\varepsilon$ для любого положительного $\varepsilon > \varepsilon_1$.

Из предположений теоремы следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N_1(\varepsilon) > 0$ такой, что $M^\varepsilon \subset P^N$ для любого $N > N_1(\varepsilon)$.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ определим две нормы:

$$\|x\|_1 = 2 \max_{i,j=\overline{1,n}} \frac{|x_j|}{v_{j2}^\varepsilon - v_{j1}^\varepsilon}\ \forall\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$
$$\|y\|_2 = \max_{i,j=\overline{1,n}} |y\_i|\ \forall y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим метрические пространства (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y), где метрики ρ_X, ρ_Y определяются нормами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ соответственно.

Выберем произвольные положительные числа α и β такие, что $\bar{\beta}(\sigma) < \beta < \alpha < \bar{\alpha}(\sigma)$. В силу непрерывности функций $\bar{\beta}(\cdot), \bar{\alpha}(\cdot)$ существует положительное число $\varepsilon_2 < 1$ такое, что $\bar{\beta}(\mathcal{E}, \tilde{\mathcal{E}}, D^*, S^*, p^*, v_1^\xi, v_2^\xi, a) < \beta, \alpha < \bar{\alpha}(\mathcal{E}, \tilde{\mathcal{E}}, D^*, S^*, p^*, v_1^\xi, v_2^\xi, a)$ для любого $\varepsilon < \varepsilon_2$. Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N_2(\varepsilon) > 0$ такой, что $\bar{\beta}(\mathcal{E}^N, \tilde{\mathcal{E}}^N, D^{*N}, S^{*N}, p^{*N}, v_1^\xi, v_2^\xi, a^N) < \beta, \alpha < \bar{\alpha}(\mathcal{E}^N, \tilde{\mathcal{E}}^N, D^{*N}, S^{*N}, p^{*N}, v_1^\xi, v_2^\xi, a^N)$ для любого $N > N_2(\varepsilon)$. Положим $\varepsilon = 2^{-1} \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}, N_3 = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\} + 1, X = \mathbb{R}_+^n, Y = \mathbb{R}^n$.

Пусть $S^N, D^N: X \to Y$ – функции спроса и предложения соответственно в модели $\sigma^N = (\mathcal{E}^N, \tilde{\mathcal{E}}^N, D^{*N}, S^{*N}, p^{*N}, v_1^\xi, v_2^\xi, a^N)$.

Повторяя рассуждения, проведенные при получении этих оценок получаем, что S^N при любом $N > N_3$ являются $\bar{\alpha}(\mathcal{E}^N, \tilde{\mathcal{E}}^N, D^{*N}, S^{*N}, p^{*N}, v_1^\xi, v_2^\xi, a^N)$-накрывающими относительно M^ε и, следовательно, α-накрывающими относительно M^ε, а функции D^N при любом $N > M_3$ на множестве M^ε удовлетворяют условию Липшица с константой $\beta < \alpha$.

Выберем произвольное $R > 0$ такое, что $B_X(p, R) \subset M^\varepsilon$. Из формул (1), (2) следует, что $S^N(p) \to S(p), D^N(p) \to D(p)$ при $N \to \infty$. Следовательно, согласно теореме 2, существуют номер $\bar{N} > N_3$ и последовательность $\{p^N\} \subset B_X(p, R)$ такие, что $S^N(p^N) + a = D^N(p^N)$ и $p^N \to p$ при $N \to \infty$. Поскольку $p^N \in B_X(p, R) \subset M^\varepsilon \subset P^N = [c_{11}^N, c_{21}^N] \times \ldots \times [c_{1n}^N, c_{2n}^N]$ для любого $N > \bar{N}$, то вектор p^N является вектором равновесных цен в модели σ^N.

Достаточные условия неединственности положения равновесия содержатся в следующей теореме.

Теорема 4. Пусть в модели $\sigma \in \Sigma$ $\alpha > 2\beta$, $\exists \hat{p} \in P$:

$$\hat{p} \neq p^0, \qquad S(\hat{p}) + a = D(p^0).$$

Тогда для любых $p \in P$ таких, что $S(p) + a = D(p^0)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $\xi \in P$ такая, что $\xi \neq p^0$, $S(\xi) + a = D(\xi)$ и выполняется

$$\rho_X(\xi, \hat{p}) \leq \frac{\beta + \varepsilon}{\alpha - \beta} \rho_X(\bar{p}, \hat{p}), \qquad \rho_Y\big(S(\xi), S(p^0)\big) \leq \alpha \frac{\beta + \varepsilon}{\alpha - \beta} \rho_X(\bar{p}, \hat{p}).$$

Доказательство. Следует из теоремы 1 в [9].

Заключение

Рассмотрена статическая модель открытого рынка. Для нее рассмотрен вопрос об устойчивости и неединственности положения равновесия. Соответствующие теоремы были получены как следствия теорем об устойчивости и неединственности точек совпадения накрывающего и липшицевого отображений. Теорема о неединственности положения равновесия может быть использована для получения конкретных условий на параметры модели. Для этого можно воспользоваться теорией линейных неравенств.

Аналогичные вопросы можно рассмотреть и статической закрытой модели рынка – модели, в которой компоненты вектора импорта равны нулю. Несмотря на то, что данная модель является частным случаем модели, рассмотренной в работе, она также интересна для независимого исследования, поскольку позволяет получить содержательные результаты, используя теорию линейных неравенств.

Литература

1. Smith, A. An Inquiry into the Nature and Cause of the Wealth of Nations. 2 Vols. / A. Smith. – London, 1776.
2. *Walras, L.* Elements d`Economie Politique Pure / L. Walras. – Lausanne, 1874.
3. *Arrow, K.J., Debreu, G.* Existence of an equilibrium for a competitive economy – Econometrica, 1954, Vol. 22, №3.
4. *Арутюнов, А.В.* Точки совпадения двух отображений. – Функциональный анализ и его приложения, 2014. – Т. 48. – Вып. 1. – С.89–93.
5. *Арутюнов, А.В., Жуковский, С.Е.* Существование обратных отображений и их свойства. – Труды МИАН, 2010. – т. 271. – С. 18–28.
6. *Arutyunov, A.V., Zhukovskiy, S.E., Pavlova, N.G.* Equilibrium price as a coincidence point of two mappings. – Comput. Math. Math. Phys., 2013. – 53:2. – pp. 158–169.
7. *Kotyukov, A.M. Pavlova, N.G.* Equilibrium in Market Models. – 14th International Conference Management of large-scale system development (MLSD), 2021. – pp. 1–5.
8. *Arutyunov, A.V., Kotyukov, A.M., Pavlova, N.G.* Equilibrium in Market Models with Known Elasticities. – Advances in Systems Science and Applications, 2022, – 21(4). – pp. 130–144.
9. *Арутюнов, А.В., Гельман, Б.Д.* О структуре множества точек совпадения. – Матем. сб., 2015. – т. 206. – № 3. – С. 35–56.
10. *Арутюнов, А.В. Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений. – Мат. Заметки,* 2009. – Т. 86. – Вып. 2. – С. 163–169.