DOI: 10.25728/mlsd.2022.1406

ОБЛАСТИ ВЛИЯНИЯ АГЕНТОВ В СЕТЕВЫХ ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

Еналеев А.К.
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Россия,
г. Москва, ул. Профсоюзная, д.65
anverena@mail.ru

Аннотация: Рассматриваются области влияния в системе с взаимосвязанными агентами. Взаимодействия агента с другими определяются наличием потерь, зависящих от несовпадения стратегий окружающих агентов от желаемой стратегии этого агента. Исследованы условия, когда области влияния определяются как равновесия в доминантных стратегиях.

Ключевые слова: Взаимодействие агентов, равновесие в доминантных стратегиях, сетевая структура, согласование, потери агентов от несоответствия стратегий, область влияния агента.

Введение

Многие процессы коллективной деятельности можно представить в виде выполнения агентами определенных взаимно согласованных действий. Примерами такой деятельности являются производственная деятельность подразделений на сборочном предприятии, деятельность группы предприятий по выпуску конечного продукта, формирование мнений членов социальной группы в процессе общения, процедуры голосования и др. В процессе такого взаимодействия каждый агент заинтересован не только в непосредственном выигрыше от своего действия, но также учитывает дополнительное влияние на его выигрыш действий других агентов в зависимости от его действия.

Вообще говоря, влияние выбора действия агента на выбор действий других агентов в такой системе является определяющим в проблемах поиска равновесного состояния и широко исследуется в теории игр [1, 2]. В последующем исследовании сфокусируемся на исследовании частного случая такого влияния, которое будем называть *сильным влиянием*. Будем говорить, что агент j выбором своего действия y_j сильно повлиял на выбор действия y_i агента с номером i, если $y_i = k_{ij} y_j$, где k_{ij} – некоторый заданный коэффициент пропорциональности, т.е. сильное влияние на агент заключается в выборе такого действия этим агентом, которое пропорционально действию влияющего агента. Если все коэффициенты $k_{ij} = 1$, то рассматриваемому случаю взаимного влияния агентов соответствует изучение равновесий в симметричных играх [3, 4].

Структуру игры и соответственно такого взаимодействия и взаимного влияния удобно представить в виде графа, в вершинах которого находятся агенты, а дуги, связывающие агента с другими агентами, описывают потери от несоответствия действий этого агента с действиями других агентов.

В статье исследуются проблемы существования равновесий в доминантных стратегиях для отмеченных выше вариантов сильного влияния.

Отметим, что в работах по исследованию степеней влияния агентов на группы других агентов в социальных сетях [5], индексов влияния, характеризующих создание коалиций [6], моделей порогового влияния [7] и др., как правило, связи между агентами характеризуются скалярными величинами. В отличие от этих исследований, в настоящей статье рассматривается математическая модель, в которой связи между агентами задаются в виде функции потерь агента от несовпадения его стратегии от взвешенных стратегий других агентов. В качестве инструмента анализа равновесий и областей влияния агентов в такой модели используются методы согласованного управления в активных системах [8].

Настоящая статья является развитием предшествующих публикаций автора [9-12]. В [9] была описана модель активной системы, положенная в основу рассматриваемой здесь модели организационной сетевой системы, а также определены условия, обеспечивающие в равновесии выбор агентами совпадающих стратегий (симметричного равновесия). В [10] рассматривалась задача определения Центром функций штрафов за отклонение стратегий агентов от назначенных им планов, при которых агенты в равновесии выбирают стратегии, совпадающие с планами $x=\{x_i\}$, и соблюдается условие $x_i = k_{ij} x_j$. Рассмотрен также случай наличия одного выделенного, «самого влиятельного» агента. В [11] описана модель в условиях неполной информированности Центра о целевых функциях агентов и исследованы условия сообщения агентами в Центр достоверной информации. В [12] для частной модели описаны области влияния агентов и определены способы управления «размером» областей влияния агентов посредством назначения поощрений.

1 Описание модели

Рассмотрим систему, состоящую из n агентов. Пусть агенты выбирают действия (стратегии) y_i из множеств допустимых действий Y_i, т.е. $y_i \in Y_i$, $i \in I = \{1,...,n\}$. Предположим, что множества Y_i компактны и $Y_i \subset Y$, где Y – компактное множество из R^n.

Этой системе поставим в соответствие граф $G=(I, A)$, где I – множество, состоящее из n вершин, соответствующих агентам, A множества дуг.

Граф G описывает структуру зависимости выигрыша агента от влияния действий своего окружения. Пусть выигрыши агентов определяются целевыми функциями

$f_i(y_i,\bar{y}_{-i}) = h_i(y_i) - \sum_{j\neq i}\lambda_{ij}(k_{ij}y_j, y_i)$, где $\bar{y}_{-i} = (y_1,...,y_{i-1},y_{i+1},...,y_n)$ – действия всех агентов за исключением i-го агента, $h_i(y_i)$ – функция непосредственного дохода агента при выборе действия y_i, $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(k_{ij}y_j, y_i)$ – функции потерь агента i за отклонение его действия y_i от взвешенного действия $k_{ij}y_j$ агента с номером j, где k_{ij} – заданные коэффициенты, характеризующие соответствие решений y_i и y_j агентов i и j. Примем $\lambda_{ij}(k_{ij}y_j, y_i) \geq 0$, $\lambda_{ii}(y_i, y_i) = 0$ и $\lambda_{ij}(k_{ij}y_j, y_i) = 0$, если $k_{ij}y_j = y_i$. Функции потерь λ_{ij}, которые не равны тождественно нулю на всей области определения, соответствуют дугам графа G.

Такая модель связей агентов в рассматриваемой системе, а именно, наличие функций потерь λ_{ij}, позволяет исследовать степень влияния агентов друг на друга.

Будем считать, что коэффициенты k_{ij} таковы, что $k_{ij}y_j \in Y$. Предположим, что функции $h_i(y_i)$ полунепрерывны сверху, а $\lambda_{ij}(k_{ij}y_j, y_i)$ полунепрерывны снизу по всем переменным, каждый из которых может принимать значение на множестве Y, $\bar{y}$ – совокупность действий всех агентов, $\bar{y} \in \bar{Y} = \prod_{i\in I} Y_i$.

Предположим, что агенты выбирают действия y_i^* из условия

$$y_i^* \in Z_i(\bar{y}_{-i}^*) = \operatorname{Arg}\max_{y_i\in Y_i} f_i(y_i, \bar{y}_{-i}^*). \quad (1)$$

Выражения (1) определяют равновесие по Нэшу [1, 2].

2 Области сильного влияния агентов

Рассмотрим два произвольных агента с номерами i и j. Обстановка для агента j определяется выбором действий $\bar{y}_{-j} = (y_1,...,y_{j-1},y_{j+1},...,y_n)$ остальными агентами. При фиксированной обстановке рассмотрим множество $Z_j(\bar{y}_{-j}) = \operatorname{Arg}\max_{y_j\in Y_j} f_j(y_j, \bar{y}_{-j})$ рациональных действий для агента с номером j. Агент i может выбором своего действия y_i влиять на множество $Z_j(\bar{y}_{-j})$.

Представим целевую функцию агента j в виде

$$f_j(y_j,\bar{y}_{-j}) = h_j(y_j) - \sum_{m\neq j,i}\lambda_{jm}(k_{jm}y_m, y_j) - \lambda_{ji}(k_{ji}y_i, y_j) = H_{-i}^{j}(y_j, \bar{y}_{-(j,i)}) - \lambda_{ji}(k_{ji}y_i, y_j),$$

где $H_{-i}^{j}(y_j, \bar{y}_{-(j,i)}) = h_j(y_j) - \sum_{m\neq j,i}\lambda_{jm}(k_{jm}y_m, y_j)$. Здесь $\bar{y}_{-(j,i)}$ обозначает набор действий всех агентов кроме агентов i и j. Функцию $\lambda_{ji}(k_{ji}y_i, y_j)$ можно интерпретировать как функцию штрафа за отклонение действия y_j агента j от «плана» $k_{ji}y_i$, назначенного агентом i.

Исследуем условия, при которых эта «функция штрафа» побуждает агента j выбирать действие, совпадающее с «планом» $k_{ji}y_i$, если $k_{ji}y_i \in Y_j$. Реализация этих условий и соответствующий выбор действия позволяет говорить о *сильном влиянии* агента i на агент j.

В последующем исследовании для обеспечения однозначности выбора действий агентами при максимизации своей целевой функции примем две гипотезы.

Первая гипотеза, назовем ее о «*предпочтительном влиянии агента i на агент j*», означает, что если существует действие $y'_{jm} = k_{jm}y_m \neq k_{ji}y_i$ некоторого агента m, где $m\neq i$, такое, что

$\max_{y_j \in Y_j} f_j(y_j, \bar{y}_{-j}) = f_j(k_{jm} y_m, \bar{y}_{-j}) = f_j(k_{ji} y_i, \bar{y}_{-j})$, то агент j выберет действие $y_j^* = k_{ji} y_i$. Таким образом в гипотезе о «*предпочтительном влиянии агента i на агент j*» постулируется неравнозначность агентов, а именно агента i по отношению к агенту m. Для того чтобы снять коллизии, когда два агента равным образом влияют на рассматриваемый агент j, предлагая выбрать различные действия, примем, что априорно задана определенная, в общем случае произвольная, приоритетность агентов. Здесь, без ограничения общности, будем предполагать, что приоритетность увеличивается для агентов с большим номером, т.е. если существует $y_j'' = k_{jm} y_m$, и для агента с номером $m<i$ имеет место $f_j(y_j'', \bar{y}_{-j}) = f_j(k_{jm} y_m, \bar{y}_{-j}) = f_j(k_{ji} y_i, \bar{y}_{-j})$, то $y_j^* = y_j'' = k_{ji} y_i$. Т.е. мы считаем, что агент с номером i априорно более влиятелен в случае равенства целевой функции агента для действий $k_{ji} y_i$ и $k_{jm} y_m$.

Вторая гипотеза, назовем ее гипотезой о *благожелательности выбора агента j по отношению к «влияющему» агенту i*, означает, что если существует действие $y'_{ji} \neq k_{ji} y_i$ такое, что $\max_{y_j \in Y_j} f_j(y_j, \bar{y}_{-j}) = f_j(y'_{ji}, \bar{y}_{-j}) = f_j(k_{ji} y_i, \bar{y}_{-j})$, то агент j выберет действие $y_j^* = k_{ji} y_i$. Эта гипотеза утверждает, что если агент j подвержен сильному влиянию агента i, т.е. ему выгоден выбор действия $y_j^* = k_{ji} y_i$, но в то же время существует другое его возможное действие y'_{ji}, приносящее тот же выигрыш, то он выберет действие y_j^*. Эта гипотеза аналогична гипотезе «благожелательности» агента по отношению к Центру [8] в модели активной системы Центр-агент: здесь агент j благожелателен по отношению к агенту i так же как в [8] агент благожелателен к Центру.

Рассмотрим множество $\bar{Z}_j^i(\bar{y}_{-(j,i)}) = \bigcup_{y_i \in Y_i} Z_j(\bar{y}_{-j})$ всех «выгодных» для агента j действий, а именно, всех действий, доставляющих максимум целевой функции агента j при всех допустимых действиях $y_i \in Y_i$ агента i и фиксированных допустимых действиях $\bar{y}_{-(j,i)}$ всех агентов за исключением действий агентов i и j.

Обозначим

$$P_j^i(\bar{y}_{-(j,i)}) = \{z_j \mid z_j = k_{ji} y_i, \text{ где } y_i \in Y_i, z_i \in Y_j, H_{-i}^j(z_j, \bar{y}_{-(j,i)}) \geq$$
$$\geq H_{-i}^j(y_j, \bar{y}_{-(j,i)}) - \lambda_{ji}(z_i, y_j), y_j \in Y_j\}$$

множество взвешенных действий агента i, которые выгодно агенту j реализовать как $y_j^* = k_{ji} y_i$.

Функцию потерь $\lambda_{ji}(k_{ji} y_i, y_j)$ для агента j назовем, используя терминологию [8, 15], «*максимально-согласованной*», если

$$P_j^i(\bar{y}_{-(j,i)}) = \bar{Z}_j^i(\bar{y}_{-(j,i)}) \tag{2}$$

при всех допустимых действиях агентов с номерами, принадлежащими множеству $I \setminus (i, j)$, т. е. номерами всех агентов кроме агентов i и j.

Выражение (2) для функции потерь $\lambda_{ji}(k_{ji} y_i, y_j)$ означает, что множество всех взвешенных действий $P_j^i(\bar{y}_{-(j,i)}) \subset Y_j$ агента j, соответствующих действиям $y_i \in Y_i$ агента i, которые будут реализованы агентом j, так что выполнено условие $y_j^* = k_{ji} y_i$ является «максимально широким». Таким образом, по определению, если $k_{ji} y_i \in P_j^i(\bar{y}_{-(j,i)})$, то $y_j^* = k_{ji} y_i$. Соотношение (2) естественно назвать условием максимально-согласованного влияния.

Далее будем рассматривать класс функций потерь $\lambda_{ij}(y_j, y_i)$, где $i, j \in I$, обладающий следующим свойством: функции потерь агентов удовлетворяют «неравенствам треугольника»:

$$\lambda_{ji}(y, z) + \lambda_{ji}(z, u) \geq \lambda_{ji}(y, u) \tag{3}$$

при всех $y, z, u \in Y$.

Теорема 1. Для максимальной согласованности (2) функций потерь агента j по отношению к агенту i достаточно выполнения неравенства «треугольника» (3).

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 1 в [8].

По аналогии с утверждениями [8], множество $P_j^i(\bar{y}_{-(j,i)}) \subset Y_j$, и является множеством согласованных состояний агента *i* по отношению к агенту *j*. Если $k_{ji} y_i \in P_j^i(\bar{y}_{-(j,i)})$, то агент *j* выберет состояние $y_j^* = k_{ji} y_i$ в силу (2). Если $k_{ji} y_i \notin P_j^i(\bar{y}_{-(j,i)})$, то выбор состояния агентом *j* определяется условием

$$y_j^* = \arg\max_{y_j \in Y_j} [H_{-i}^j(y_j, \bar{y}_{-(j,i)})] \in P_j^i(\bar{y}_{-(j,i)}),$$

т.е. действие агента, в силу (1) и (2), принадлежит множеству $P_j^i(\bar{y}_{-(j,i)})$, но при этом $y_j^* \neq k_{ji} y_i$.

Таким образом агент *i*, выбирая свое состояние y_i такое, что $k_{ji} y_i \in P_j^i(\bar{y}_{-(j,i)})$ может влиять на выбор состояния агентом *j*. Более того в этом случае состояние агента *j* совпадает с «желаемым» состоянием для агента *i*. Это свойство будем называть сильным влиянием агента *i* на агент *j*, а $P_j^i(\bar{y}_{-(j,i)})$ назовем *областью сильного влияния* агента *i* на агент *j*.

Теперь мы можем определить область сильного влияния агента *i* на группу агентов с номерами I_i, где $I_i \subset I, i \notin I_i$, $\bar{x}_{I_i} = (x_j \mid j \in I_i)$ как выполнение системы условий

$$\bar{k}_{I_i i} \bar{y}_{I_i} \in \bar{P}_{I_i}^i(\bar{y}_{-i}) = \{k_{ji} y_j \in P_j^i(\bar{y}_{-(j,i)}), \quad j \in I_i\}. \tag{4}$$

Замечание 1. Обратим внимание, что, вообще говоря, возможно одновременно не только влияние агента *i* на агент *j*, но и влияние агента *j* на агент *i*. В последнем случае областью влияния является множество $P_i^j(x_i, \bar{y}_{-(i,j)})$. В рамках рассматриваемой модели выбор действий агентов *i* и *j*, обусловленных взаимным влиянием, определяется условиями $y_j^* = k_{ji} y_i^*$ и $y_i^* = k_{ij} y_j^*$. Совместное выполнение этих условий возможно только, если $k_{ji} = 1/k_{ij}$. Более того, пусть в графе, описывающего структуру влияния агентов через функции потерь, имеется контур сильного влияния. Пусть число дуг этого контура равно *L*. В этом контуре агент i_1 сильно влияет на агент i_2, агент i_2 сильно влияет на агент i_3, и так далее. Наконец, агент i_L влияет на исходный агент i_1. В этой цепочке

$y_{i_2}^* = k_{i_2 i_1} y_{i_1}^*$, $y_{i_3}^* = k_{i_3 i_2} y_{i_2}^*$,…, $y_{i_l}^* = k_{i_l i_{l-1}} y_{i_{l-1}}^*$,…, $y_{i_1}^* = k_{i_1 i_L} y_{i_L}^*$.

Отсюда следует $k_{i_2 i_1} \cdot k_{i_3 i_2} \cdot \ldots \cdot k_{i_l i_{l-1}} \cdot \ldots \cdot k_{i_1 i_L} = 1$.

3 Выявление влиятельных агентов и групп влияния

Выберем некоторый произвольный агент *i* и рассмотрим подмножество агентов I_i, не включающее агент *i*, $I_i \subset I, i \notin I_i$. Пусть множество $\bar{P}_{I_i}^i(\bar{y}_{-i}) \neq \varnothing$ влияния этого агента на группу агентов I_i, где $\bar{y}_{-(j,i)}$ обозначает набор действий всех агентов кроме агентов *i* и *j*.

Пусть существует равновесие $\bar{y}^*$ по Нэшу при выборе агентами своих действий. Если $\bar{P}_{I_i}^i(\bar{y}_{-i}) \neq \varnothing$ при $\bar{y}_{-i} \in \bar{Y}_{-i}$, $\bar{y}_{I_i}^* \in \bar{P}_{I_i}^i(\bar{y}_{-i})$, где $\bar{y}_{I_i}^* = (y_j^* \mid j \in I_i)$, то $y_j^* = k_{ij} y_i^*$ для $j \in I_i$ в равновесии по Нэшу. Это следует непосредственно из определения $P_j^i(\bar{y}_{-(j,i)})$ как множества состояний агента *j*, в которых достигается максимум его целевой функции при совпадении взвешенного действия агента *j* с действием агента *i*, т.е. $y_j^* = k_{ij} y_i^*$.

Теорема 2. Если функции потерь агентов удовлетворяют условию (3) и $\bar{P}_{I_i}^i(\bar{y}_{-i}) \neq \varnothing$ при всех допустимых $\bar{y}_{-i}$, то выбор действий $y_j^* = k_{ij} y_i^*$, где $\bar{y}_{I_i}^* \in \bar{P}_{I_i}^i(\bar{y}_{-i})$, для агентов *j* из множества I_i независим от выбора действий агентов с номерами из множества $I \setminus I_i$.

Доказательство. В силу условия (3) имеет место (2) согласно теореме 1. Но из (3) следует, что если $y_j^* \in \bar{P}_{I_i}^i(\bar{y}_{-i}) \neq \varnothing$, то для любого агента с номером $j \in I_i$ имеет место $y_j^* = k_{ij} y_i^*$ независимо от выбора действий всех агентов с номерами $m \in I \setminus (i, j)$, что доказывает справедливость теоремы 2.

Будем говорить, что агент *i* обладает доминантным влиянием на агенты $j \in I_i$ на множестве действий $P_{I_i}^i(\bar{y}_{-i})$.

Следовательно в теореме 2 отмечается, что по отношению к агентам из множества $I \setminus I_i$ стратегии $y_i^* \in P_{I_i}^i(\bar{y}_{-i})$ являются доминантными.

Пусть в рассматриваемой системе агентов имеется некоторый агент *i*, который оказывает влияние на агент *j* , и при этом функцию потерь агента *j* можно представить в виде

$$\lambda_{ji}(k_{ji}y_i, y_j) \geq \delta_{ji}(k_{ji}y_i, y_j) + \sum_{m \neq i,j} \lambda_{jm}(k_{ji}y_i, y_j) \text{ при } k_{ji}y_i \neq y_j \ \forall \ \bar{y} \in \bar{Y}. \quad (5)$$

Примем, что в (5) $\delta_{ji}(z,y) \geq 0$, $\delta_{ji}(z,z) = 0$ и удовлетворяет неравенству «треугольника»: $\delta_{ji}(z,y) \leq \delta_{ji}(z,u) + \delta_{ji}(u,y)$ при всех $z,y,u \in Y$. Выражение (5) означает, что функция потерь $\lambda_{ji}(k_{ji}y_i, y_j)$ больше суммы функций потерь *j*-го агента от воздействия всех остальных агентов на величину $\delta_{ji}(k_{ji}y_i, y_j)$.

Рассмотрим множество $P_j^{0i}(\bar{y}_{-i}) = \{y \in Y_i \mid h_j(y) \geq h_j(z) - \delta_{ji}(y,z), \forall z \in Y_i\}$ согласованных действий агента *i* по отношению к агенту *j*, если бы функция потерь агента *j* от действий всех агентов была равна исключительно функции $\delta_{ji}(.,.)$. Множества $P_j^{0i}(\bar{y}_{-i}) \neq \varnothing$ в силу свойств функций $h_j(y)$ и множеств Y_i.

Функции потерь $\lambda_{ji}(k_{ji}y_i, y_j)$ удовлетворяют свойствам метрики если дополнительно к (3) потребовать

$$\lambda_{ji}(z,u) = \lambda_{ji}(u,z). \quad (6)$$

Теорема 3. Если $k_{ij}y_i^* \in P_j^{0i}(\bar{y}_{-i})$, функции потерь всех агентов $j \in I_i$ удовлетворяют (3), (5), и (6) то множество $\bar{P}_{I_i}^i(\bar{y}_{-i}) \neq \varnothing$ и действия $y_j^* = k_{ij}y_i^* \in P_{I_i}^i(\bar{y}_{-i})$ для агентов $j \in I_i$ являются доминантными.

Доказательство. Покажем, что при условиях утверждения 3 справедливо $f_j(y_j^*, \bar{y}_{-j}) \geq f_j(y_j, \bar{y}_{-j})$, где $y_j^* = k_{ij}y_i$ и $y_j \neq k_{ij}y_i$. Для этого рассмотрим разность

$$\Delta = f_j(y_j^*, \bar{y}_{-j}) - f_j(y_j, \bar{y}_{-j}) =$$
$$= [h_j(y_j^*) - \sum_{m \neq j,i} \lambda_{jm}(k_{jm}y_m, y_j^*) - \lambda_{ji}(k_{ji}y_i, y_j^*)] -$$
$$-[h_j(y_j) - \sum_{m \neq j,i} \lambda_{jm}(k_{jm}y_m, y_j) - \lambda_{ji}(k_{ji}y_i, y_j)] \geq$$
$$\geq [h_j(y_j^*) - \sum_{m \neq j,i} \lambda_{jm}(k_{jm}y_m, y_j^*)] -$$
$$-[h_j(y_j) - \delta_{ji}(k_{ji}y_i, y_j) - \sum_{m \neq j,i} \lambda_{jm}(k_{jm}y_m, y_j) - \sum_{m \neq i,j} \lambda_{jm}(z_m, y_j)] =$$
$$= h_j(y_j^*) - [h_j(y_j) - \delta_{ji}(k_{ji}y_i, y_j)] +$$
$$+ \sum_{m \neq j,i} [\lambda_{jm}(k_{jm}y_m, y_j) - \lambda_{jm}(k_{jm}y_m, y_j^*) + \lambda_{jm}(y_j^*, y_j)] = A + B$$

, где

$$A = h_j(y_j^*) - [h_j(y_j) - \delta_{ji}(y_j^*, y_j)],$$
$$B = \sum_{m \neq j,i} [\lambda_{jm}(k_{jm}y_m, y_j) - \lambda_{jm}(k_{jm}y_m, y_j^*) + \lambda_{jm}(y_j^*, y_j)] =$$
$$= \sum_{m \neq j,i} [\lambda_{jm}(y_j^*, y_j) - (\lambda_{jm}(k_{jm}y_m, y_j^*) - \lambda_{jm}(k_{jm}y_m, y_j))] \geq$$
$$\geq \sum_{m \neq j,i} [\lambda_{jm}(y_j^*, y_j) - \lambda_{jm}(y_j, y_j^*)] = \sum_{m \neq j,i} [\lambda_{jm}(y_j^*, y_j) - \lambda_{jm}(y_j^*, y_j)] = 0.$$

В силу предположения $y_j^* = k_{ij} y_i \in P_j^{0i}(\bar{y}_{-i})$ и выполнения неравенства «треугольника» для функции $\delta_{ji}(k_{ji} y_i, y_j)$ справедливо неравенство $h_j(y_j^*) \geq h_j(y_j) - \delta_{ji}(y_j^*, y_j)$ для всех $x_j \in Y_j$, $y_j \in Y_j$. Отсюда следует $A \geq 0$.

Таким образом доказано, что верно

$$f_j(y_j^*, \bar{y}_{-j}) \geq f_j(y_j, \bar{y}_{-j}) \text{ при всех } j \in I_i, \bar{y} \in \bar{Y}. \quad (7)$$

Но (7) означает, что $\bar{P}_{I_i}^i(\bar{y}_{-i}) \neq \varnothing$ и действия $y_j^* = k_{ij} y_i^* \in P_{I_i}^i(\bar{y}_{-i})$ для агентов $j \in I_i$ являются доминантными. Теорема 3 доказана.

Теорема 3 позволяет использовать соотношение (5) для определения агентов сильного влияния в сетевых организационных структурах.

Заключение

Утверждения, сформулированные в статье для описанной модели системы с сетевой структурой связей агентов с функциями потерь, создают основу для дальнейших исследований различных вариантов структур связей между агентами и построения оптимальных механизмов управления с использованием свойств областей влияния. Такая модель позволяет представлять взаимодействия агентов организационных систем с сетевой структурой связей агентов, в том числе иерархический структур.

Результаты анализа математической модели позволит исследовать прикладные проблемы влияния в социальных сетях, влияния кандидатов на выборные должности на группы населения, участвующих в голосовании, оценки областей баланса в комплектующих материалах в сборочных производствах.

Литература

1. *Новиков Д.А.* Теория управления организационными системами. – М.: Физматлит, 2007. – 584с.
2. *Maschler M., Solan E., Zamir S.* Game Theory. Cambridge University press. 2013. – 979p.
3. *Amir R., Jakubczyk M., and Knauff M.* Symmetric versus asymmetric equilibria in symmetric supermodular games // International Journal of Game Theory. 2008. Vol. 37. – P. 307-320.
4. *Hefti A.* Equilibria in symmetric games: Theory and applications // Theoretical Economics. 2017. No.12. – P. 979-1002.
5. *Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства / Под ред. Д.А.Новикова. – М.: МЦНМО, 2018. – 224 с.
6. *Алескеров Ф.Т.* Индексы влияния, учитывающие предпочтения участников по созданию коалиций // Доклады Академии наук, 2007. – С. 594-597.
7. *Бреер В.В., Новиков Д.А., Рогаткин А.Д.* Управление толпой: математические модели порогового коллективного поведения. – М. : Ленанд. 2016. – 168с.
8. *Еналеев А. К.* Оптимальность согласованных механизмов функционирования в активных системах // Управление большими системами. 2011. Выпуск 33. – С.143-166. A. K. Enaleev “Optimal incentive-compatible mechanisms in active systems,” in Automation and Remote Control. No. 3, vol. 74, 2013. – P. 491-505.
9. *Еналеев А.К.* Консолидированные равновесия в согласованной активной системе с сетевой структурой / Материалы 10-й Всероссийской мультиконференции по проблемам управления (МКПУ-2017). – Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета. 2017. Т.3. – С. 23-25.
10. *Enaleev A.K.* Coordinated Management in Hierarchical Network Structures [Электронный ресурс] //Proceedings of 12th Conference Management of Large-Scale System Development (MLSD'2019). IEEE. 2019. – P. 1-5. URL: https: // ieeexplore . ieee . org /document/8911041 (дата обращения 01.06.2022).
11. *Enaleev A.K.* Concordant Mechanisms in Network with Dual Type Dependencies of Agents and Incomplete Information [Электронный ресурс] //13th International Conference" Management of large-scale system development" (MLSD'2020). – IEEE. 2020.–P.1-5. URL: https:// ieeexplore.ieee.org /document/9247808 (дата обращения 01.06.2022).
12. *Еналеев А.К.* Управление областями влияния агентов в сетевых активных системах. / Материалы XIV-й Всероссийской мультиконференции по проблемам управления (МКПУ-2021). – Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета. 2021. Т.2. – С. 213-215.
13. *Бурков В.Н.* Основы математической теории активных систем. – М.: Наука, 1977. – 256с.
14. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. – М.: Наука, 1978. – 327с.
15. Большие системы: моделирование организационных механизмов/ Бурков В.Н. и др. – М.: Наука, 1989. – 245с.
16. Механизмы управления. – М.: ЛЕНАНД, 2011. – 192с. Mechanism Design and Management. Mathematical Methods for Smart Organizations/ Business Issues, Competition and Entrepreneurship. New York: NOVA publishers, 2013.